

図チャレ 第 61 回 (2006 年 10 月)

円に内接する四角形 ABCD があり，辺 AB の A の側への延長と辺 CD の D の側への延長が点 P で交わるものとする。

(1) $\triangle PBC \sim \triangle PDA$ であることを示せ。

(2) 辺 BC 上に端点でない点 E をとり，線分 PE と辺 AD の交点を F とする。

$$BE : EC = DF : FA$$

ならば，線分 PE は $\angle BPC$ の二等分線であることを示せ。

解答

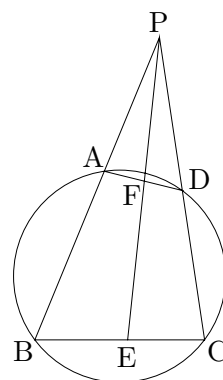
(1) 円に内接する四角形の対角は互いに補角であるから

$$\angle PBC = \angle PDA$$

$\angle P$ は共通であるから，2 角相等により

$$\triangle PBC \sim \triangle PDA$$

(証明おわり)



(2) $\triangle PBE$ と $\triangle PDF$ を考える。 $\frac{BE}{EC} = \frac{DF}{FA}$ より

$$\frac{BE}{BC} = \frac{DF}{DA} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\triangle PBC \sim \triangle PDA$ より

$$\frac{PB}{BC} = \frac{PD}{DA} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①かつ②より

$$\frac{BE}{PB} = \frac{DF}{PD}$$

既に示したように $\angle PBC = \angle PDA$ であるから，2 辺の長さの比とそのはさむ角の大きさが等しいことより

$$\triangle PBE \sim \triangle PDF$$

したがって，特に

$$\angle BPE = \angle DPF$$

となるから，線分 PE は $\angle BPC$ を二等分する。

(証明おわり)