

図チャレ 第 62 回 (2006 年 11 月)

一辺の長さが 1 である立方体 ABCD-EFGH の 4 頂点を結んでできる 2 つの正四面体 ACFH, BDEG の共通部分 K の体積 V を求めよ。

解答

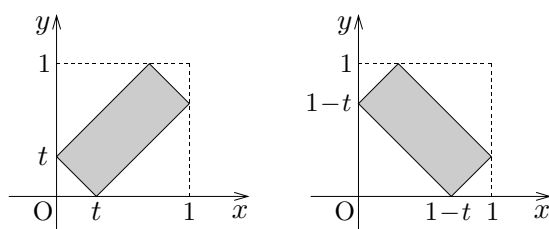
座標空間において

$$A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), C(1, 1, 0), D(0, 1, 0)$$

$$E(0, 0, 1), F(1, 0, 1), G(1, 1, 1), H(0, 1, 1)$$

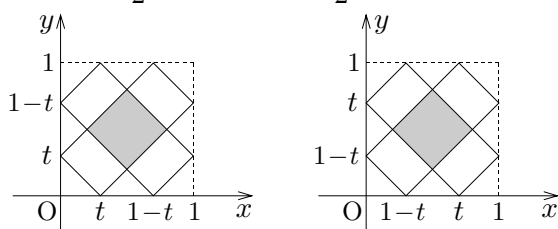
とおく。

平面 $z = t$ ($0 \leq t \leq 1$) により正四面体 ACFH, BDEG を切るとき, 断面はそれぞれ



であるから, 平面 $z = t$ による K の断面は次図の網目部分である。

$$0 \leq t \leq \frac{1}{2} \text{ のとき} \qquad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \text{ のとき}$$



断面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \begin{cases} (\sqrt{2}t)^2 = 2t^2 & (0 \leq t \leq \frac{1}{2}) \\ \{\sqrt{2}(1-t)\}^2 = 2(1-t)^2 & (\frac{1}{2} \leq t \leq 1) \end{cases}$$

共通部分 K の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 S(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} 2t^2 dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 2(1-t)^2 dt \\ &= \left[\frac{2}{3}t^3 \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{2}{3}(1-t)^3 \right]_{\frac{1}{2}}^1 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6} \quad (\text{答})$$

(注)

1° 共通部分 K の正体は、底面が一边の長さ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の正方形、高さ $\frac{1}{2}$ の正四角錐を2つあわせた図形であり、それに気づけば体積 V を

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{6}$$

と求めることもできる。

2° 2007年に大阪大学で本問と全く同じ出題がなされている。