

図チャレ 第 63 回 (2006 年 12 月)

三角形 ABC の内部に点 P があり，直線 AP と辺 BC の交点を D，直線 BP と辺 CA の交点を E，直線 CP と辺 AB の交点を F とする。直線 BC と直線 EF が点 G で交わり，G から直線 AD におろした垂線の足 H が D と異なるとき，線分 HD は $\angle BHC$ を 2 等分することを示せ。

解答

チェバの定理より

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

メネラウスの定理より

$$\frac{BG}{GC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$BD:DC = BG:GD$$

この比を $a:b$ として

$$BQ:QC = a:b$$

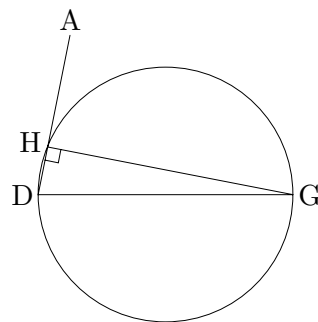
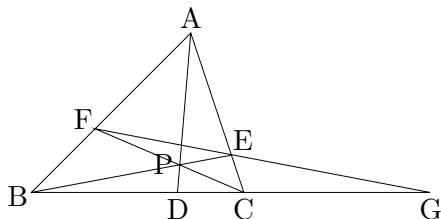
である点 Q の軌跡を描くと，DG を直径とする円(アポロニウスの円)になる。このとき，円周角の性質より，任意の点 Q に対して

$$\angle DQG = 90^\circ$$

であるから，点 H はこの円周上にある。したがって，

$$BH:HC = BD:DC$$

であり，線分 HD は $\angle BHC$ を 2 等分する。



(証明おわり)