

図チャレ 第 65 回 (2007 年 2 月)

外接する半径 1 の円 C_1 , C_2 が $\triangle PQR$ の内部(周上も含む)にあり, 円 C_1 は 2 辺 PQ, QR に接し, 円 C_2 は 2 辺 QR, RP に接する。さらに, 半径 r の円 C_3 は 2 円 C_1 , C_2 と外接し, 2 辺 PQ, PR と接する。

- (1) r のとり得る値の範囲を求めよ。
- (2) $\triangle PQR$ の面積 S の最小値を求めよ。

解答

- (1) C_1 と C_3 の共通接線のひとつが C_2 と C_3 の共通接線のひとつと平行になるのは,

$$r = 2$$

のときである。

直線 QR でない C_1 と C_2 の共通接線に C_3 が接するのは, $0 < r < 1$ のもとで

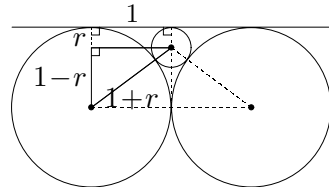
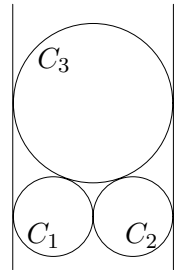
$$(1+r)^2 = (1-r)^2 + 1^2$$

のときであり, これを計算すると

$$2r = -2r + 1 \quad \therefore r = \frac{1}{4}$$

$\triangle PQR$ が存在するための条件は, C_3 の半径 r が以上で求めた 2 つの値の間にあることであるから, r のとり得る値の範囲は

$$\frac{1}{4} < r < 2 \quad (\text{答})$$



- (2) QR の中点を M, 円 C_1 の中心を C, 線分 PQ, QM と円 C_1 との接点をそれぞれ D, E とする。

$$\angle QCD = \angle QCE = \theta \quad \left(\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

とおくと,

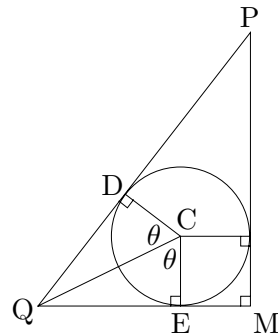
$$\angle PQM = \pi - 2\theta$$

$$CE = EM = (C_1 \text{ の半径}) = 1 \text{ より}$$

$$QE = \tan \theta, \quad QM = \tan \theta + 1$$

であるから, 補角の公式と 2 倍角の公式より

$$\begin{aligned} PM &= QM \tan(\pi - 2\theta) = (\tan \theta + 1)(-\tan 2\theta) \\ &= (\tan \theta + 1) \frac{2 \tan \theta}{\tan^2 \theta - 1} \\ &= \frac{2 \tan \theta}{\tan \theta - 1} \end{aligned}$$



$\tan \theta = t (> 1)$ とおくと, $\triangle PQR$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 2QM \cdot PM = \frac{2t(t+1)}{t-1} \\ &= \frac{2(t-1+1)(t-1+2)}{t-1} \\ &= 2 \cdot \frac{(t-1)^2 + 3(t-1) + 2}{t-1} \\ &= 2 \left(t-1 + \frac{2}{t-1} + 3 \right) \end{aligned}$$

相加・相乗平均の不等式より

$$S \geq 2 \left(2\sqrt{(t-1) \cdot \frac{2}{t-1}} + 3 \right) = 4\sqrt{2} + 6$$

ここで, 不等式の等号は

$$t-1 = \frac{2}{t-1} > 0 \quad \text{すなわち} \quad t = 1 + \sqrt{2}$$

のとき成り立つから,

$$\triangle PQR \text{ の面積 } S \text{ の最小値は } 4\sqrt{2} + 6 \quad (\text{答})$$

である。

(注) (2)では, S を C_3 の半径 r で表すことにこだわると, 計算が複雑になる。2 円 C_1, C_2 に接する任意の三角形 PQR に対して, 円 C_3 を描くことができることに注目して, 適切な変数設定をすることも重要なポイントである。上の解答では角度を変数にとったが, 線分の長さを変数にとって, 相似な直角三角形を考えてもよい。

$PQ = PR$ となるので, 直角三角形 PQM と円 C_1 だけ考えれば条件が記述できることも見逃さない。