

## 図チャレ 第 66 回 (2007 年 3 月)

半径 1 の円の周上に 4 点 A, B, C, D がこの順にある。弧 AB, 弧 BC, 弧 CD, 弧 DA の長さをそれぞれ  $\frac{1}{2}\pi$ ,  $\frac{1}{2}\pi$ ,  $\frac{2}{3}\pi$ ,  $\frac{1}{3}\pi$  とする。ただし,  $\pi$  は円周率である。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 線分 AB の長さを求めよ。
- (2) 直線 AC と直線 BD の交点を P とするとき,  $\angle APB$  の大きさを求めよ。
- (3) 線分 AP の長さを求めよ。

出典: 2007 年 新潟大学

解答

- (1) 円の中心を O とすると, 仮定より

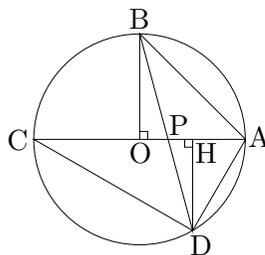
$$\angle AOB = \angle BOC = \frac{\pi}{2}$$

円周角の性質より

$$\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{\pi}{4}$$

よって,  $\triangle OAB$  は  $\angle AOB$  を直角とする直角二等辺三角形となるから,

$$AB = \sqrt{2} OA = \sqrt{2} \quad (\text{答})$$



- (2) AC は円の直径となるから

$$\angle ADC = \frac{\pi}{2}$$

$$\angle ACD = \frac{1}{2}\angle AOD = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ACD = \frac{\pi}{6}$$

$\triangle ABP$  の内角の大きさの総和は  $\pi$  であるから

$$\angle APB = \pi - \angle ABP - \angle BAP = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{12}\pi \quad (\text{答})$$

- (3) 点 D から線分 AC におろした垂線の足を H とすると

$$\triangle POB \quad \triangle PHD$$

であるから,

$$OP : HP = OB : HD = 1 : \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left( HD = \frac{\sqrt{3}}{2} AD = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} AC \right)$$

$OH = OA - AH = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  であるから,

$$HP = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{2(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{2}$$

$$\therefore AP = AH + HP = \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3} - 3}{2} = \sqrt{3} - 1 \quad (\text{答})$$

(注) 上の解答は初等幾何で解いたが、試験場では正弦定理と加法定理で解く方が思いつきやすいだろうか。

$\triangle ABP$  において、正弦定理より

$$\frac{AP}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{2}}{\sin \frac{7}{12}\pi} \quad \therefore AP = \frac{1}{\sqrt{2} \sin \frac{7}{12}\pi}$$

$\frac{7}{12}\pi = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$  であるから、加法定理より

$$\begin{aligned} \sin \frac{7}{12}\pi &= \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\therefore AP = \frac{2}{\sqrt{3} + 1} = \sqrt{3} - 1 \quad (\text{答})$$