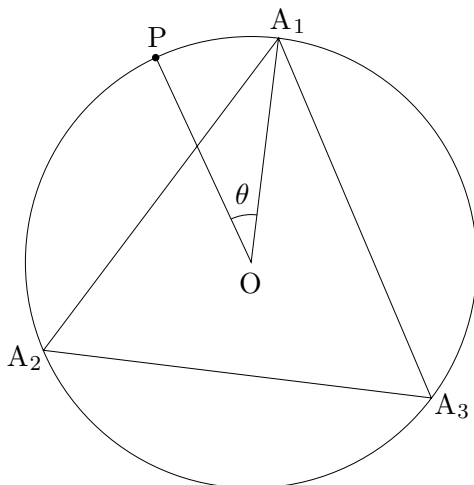


## 図チャレ 第 68 回 (2007 年 5 月)

中心  $O$ 、半径 1 の円に正三角形  $A_1 A_2 A_3$  が図のように内接しているとする。  
 $O$  を中心として点  $A_1$  を角  $\theta$  だけ回転移動した位置にある点を  $P$  とする。このとき、 $\sum_{i=1}^3 |\overrightarrow{A_i P}|^2$ 、 $\sum_{i=1}^3 |\overrightarrow{A_i P}|^4$  は  $\theta$  のとり方によらないことを示し、それぞれの値を求めよ。



出典：2007 年 広島市立大学 情報科学部

### 解答

座標平面上で

$$O(0, 0), A_1(1, 0), P(\cos \theta, \sin \theta),$$

$$A_2\left(\cos \frac{2}{3}\pi, \sin \frac{2}{3}\pi\right), A_3\left(\cos \frac{4}{3}\pi, \sin \frac{4}{3}\pi\right)$$

として、一般性を失わない。このとき、

$$\overrightarrow{A_1 P} = (\cos \theta - 1, \sin \theta),$$

$$\overrightarrow{A_2 P} = \left(\cos \theta + \frac{1}{2}, \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\overrightarrow{A_3 P} = \left(\cos \theta + \frac{1}{2}, \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

であるから、

$$|\overrightarrow{A_1 P}|^2 = (\cos \theta - 1)^2 + \sin^2 \theta = 2 - 2 \cos \theta$$

$$|\overrightarrow{A_2 P}|^2 = \left(\cos \theta + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 2 + \cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta$$

$$|\overrightarrow{A_3P}|^2 = 2 + \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta$$

よって,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 |\overrightarrow{A_iP}|^2 &= (2 - 2 \cos \theta) + (2 + \cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta) + (2 + \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta) \\ &= 6 \text{ (一定)} \end{aligned}$$

次に,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 |\overrightarrow{A_iP}|^4 &= (2 - 2 \cos \theta)^2 + (2 + \cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta)^2 + (2 + \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta)^2 \\ &= (2 - 2 \cos \theta)^2 + 2\{(2 + \cos \theta)^2 + 3 \sin^2 \theta\} \\ &= (4 - 8 \cos \theta + 4 \cos^2 \theta) + 2(4 + 4 \cos \theta + \cos^2 \theta) + 6 \sin^2 \theta \\ &= 12 + 6(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= 18 \text{ (一定)} \end{aligned}$$

### 別解

P は劣弧  $A_1A_2$  上にあるとして示せば十分である。

正弦定理より, 正三角形  $A_1A_2A_3$  の各辺の長さは  $\sqrt{3}$  であり, 円周角の性質より

$$\angle A_3PA_1 = \angle A_3PA_2 = 60^\circ$$

である。

$A_1P = x$ ,  $A_2P = y$ ,  $A_3P = z$  とおくと,  $\triangle A_1A_3P$  において余弦定理より

$$(\sqrt{3})^2 = x^2 + z^2 - 2xz \cos 60^\circ$$

$$\therefore x^2 - xz + z^2 = 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\triangle A_2A_3P$  においても同様に

$$y^2 - yz + z^2 = 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\triangle A_1A_2P$  において余弦定理より

$$(\sqrt{3})^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 120^\circ$$

$$\therefore x^2 + xy + y^2 = 3 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

① - ② より

$$x^2 - y^2 - z(x - y) = 0 \quad \therefore (x - y)(x + y - z) = 0$$

$x = y$  のとき,  $\theta = 60^\circ$ ,  $x = y = 1$ ,  $z = 2$  となるから, いずれの場合も

$$x + y - z = 0 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

③, ④より

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (x + y)^2 = 2(x^2 + xy + y^2) = 6 \text{ (一定)}$$

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + z^4 &= x^4 + y^4 + (x + y)^4 \\ &= 2(x^4 + y^4 + 2x^3y + 2xy^3 + 3x^2y^2) \\ &= 2\{(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 + 2xy(x^2 + y^2) + 3x^2y^2\} \\ &= 2\{(x^2 + y^2)^2 + 2xy(x^2 + y^2) + x^2y^2\} \\ &= 2(x^2 + y^2 + xy)^2 \\ &= 2 \times 3^2 = 18 \text{ (一定)} \end{aligned}$$