

図チャレ 第70回(2007年7月)

四面体 ABCD の辺 AB 上に点 E, 辺 BC の延長上に点 F, 辺 CD の延長上に点 G, 辺 DA 上に点 H をとる。ただし, 4 点 E, F, G, H はいずれも頂点とは異なるものとする。 $\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CG}{GD} \cdot \frac{DH}{HA} = 1$ ならば, 4 点 E, F, G, H は同一平面上にあることを示せ。

解答

直線 EF と辺 AC の交点を P, 直線 GH と辺 AC の交点を Q とする。
平面 ABC 上において, $\triangle ABC$ にメネラウスの定理を適用すると

$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BF}{FC} \times \frac{CP}{PA} = 1 \quad \dots\dots ①$$

平面 ACD 上において, $\triangle ACD$ にメネラウスの定理を適用すると

$$\frac{AQ}{QC} \times \frac{CG}{GD} \cdot \frac{DH}{HA} = 1 \quad \dots\dots ②$$

仮定より

$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CG}{GD} \cdot \frac{DH}{HA} = 1$$

であるから, ①, ②より

$$\frac{AP}{CP} \times \frac{CQ}{AQ} = 1 \quad \therefore \frac{AP}{CP} = \frac{AQ}{CQ}$$

P, Q はともに辺 AC 上の点であるから $P=Q$ となり, 2 直線 EF, GH は点 P で交わるから, 4 点 E, F, G, H は同一平面上にある。 (証明おわり)