

## 図チャレ 第71回(2007年8月)

正方形の各辺(両端を除く)と2点で交わる任意の円は, 正方形の外接円の内部(および周)に含まれるか。成り立つならば証明し, 成り立たないならば反例を挙げよ。

解答

座標平面上において  $O(0, 0)$ ,  $A(1, 0)$ ,  $B(1, 1)$ ,  $C(0, 1)$  とし, 正方形  $OABC$  内の点  $(a, b)$  を中心とする半径  $r$  の円が正方形  $OABC$  の各辺(両端を除く)と2点で交わるための条件をまず求める。対称性より

$$0 \leq a \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq b \leq \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

の範囲で考えれば十分である。このとき,

$$a \leq 1 - a, \quad b \leq 1 - b$$

であるから, 各辺を含む直線と  $(a, b)$  を中心とする半径  $r$  の円が異なる2点で交わるための条件は

$$r > 1 - a \quad \text{かつ} \quad r > 1 - b \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①のとき, 4頂点  $O, A, B, C$  のうち点  $(a, b)$  から最も近いのは原点  $O$  であるから, 4点  $O, A, B, C$  がすべて円外にあるのは

$$r < \sqrt{a^2 + b^2} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

のときである。したがって, ①のもとで題意の条件を満たすのは, ②かつ③を満たす正の実数  $r$  が存在することであり, それは

$$a^2 + b^2 > (1 - a)^2 \quad \text{かつ} \quad a^2 + b^2 > (1 - b)^2 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

が成り立つことと同値である。

①かつ④を満たす点  $(a, b)$  として  $P\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{16}\right)$  を選び,

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}} - t \quad \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ は正方形 } OABC \text{ の外接円の半径} \right)$$

とにおいて,  $t(> 0)$  が②, ③および

$$\frac{7}{16} - r < \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{すなわち} \quad r > \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{16}$$

を満たすように定められるかを考える。

$r = \frac{1}{\sqrt{2}} - t$  かつ  $t > 0$  かつ  $r > \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{16}$  より  $r$  を消去すると

$$0 < t < \frac{1}{16} \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

である。  $1 - a = \frac{1}{2} < 1 - b = \frac{9}{16}$  を考えて, ②より

$$r - (1 - b) = \frac{1}{\sqrt{2}} - t - \frac{9}{16} > 0$$

$$\therefore t < \frac{8\sqrt{2} - 9}{16} \quad \dots\dots \textcircled{6}$$

③より

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - t\right)^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{16}\right)^2 = \frac{113}{16^2}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{113}}{16} < t < \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{113}}{16} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

以下、連立不等式 {⑤, ⑥, ⑦} を解く。まず、

$$\frac{8\sqrt{2} - 9}{16} - \frac{1}{16} = \frac{4\sqrt{2} - 5}{8} = \frac{\sqrt{32} - \sqrt{25}}{8} > 0$$

より

$$\textcircled{5} \text{かつ} \textcircled{6} \iff \textcircled{5}$$

明らかに  $\frac{1}{16} < \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{113}}{16}$  であり、 $\left(\frac{21}{2}\right)^2 = \frac{441}{4} < \frac{452}{4} = 113$  を用いると

$$\begin{aligned} \frac{1}{16} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{113}}{16}\right) &= \frac{1 + \sqrt{113} - 8\sqrt{2}}{16} \\ &> \frac{1}{16} \left(1 + \frac{21}{2} - 8\sqrt{2}\right) \\ &= \frac{1}{16} \cdot \frac{23 - 16\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{529} - \sqrt{512}}{32} > 0 \end{aligned}$$

より  $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{113}}{16} < \frac{1}{16}$  が示され、

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{113}}{16} < t < \frac{1}{16} \text{ を満たす実数 } t \text{ が存在する}$$

ことがわかる。

したがって、座標平面上において

4点  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(0, 1)$  を頂点とする正方形に対して、  
中心  $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{16}\right)$ 、半径  $\frac{1}{\sqrt{2}} - t$   $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{113}}{16} < t < \frac{1}{16}\right)$  の円  
を描けば、この円は正方形の各辺(両端を除く)と2点で交わり、  
外接円の外部の点を通る

ことが反例となって、

命題は不成立 (答)

である。