

図チャレ 第72回 (2007年9月)

四角形 ABCD の内部に，次の 2 条件を満たす点 O がある。

(i) O を通る任意の直線は，四角形 ABCD (の周) と 2 点のみを共有する。

(ii) O を通る任意の直線は，四角形 ABCD の面積を 2 等分する。

このとき，四角形 ABCD はどのような四角形であるか。

解答

辺 AB 上に任意の 3 点 P_1, P_2, P_3 をとることができて， OP_1, OP_2, OP_3 の延長と四角形 ABCD の周との交点をそれぞれ Q_1, Q_2, Q_3 とする。 P_1, P_2, P_3 を十分近くにとることにより，3 点 Q_1, Q_2, Q_3 は(四角形 ABCD の)同じ辺上にあるとしてよい。

$\overline{OP_k} = a_k, \overline{OQ_k} = b_k (k = 1, 2, 3)$ とおく。

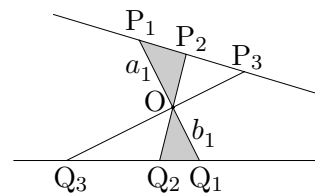
条件(ii)より $\triangle OP_1P_2$ と $\triangle OQ_1Q_2$ の面積は等しく，

$$\angle P_1OP_2 = \angle Q_1OQ_2 \quad (\text{対頂角})$$

であるから，面積公式より

$$a_1 a_2 = b_1 b_2$$

$$\therefore \frac{a_1}{b_1} = \frac{b_2}{a_2}$$



..... ①

同様に考えて， $a_1 a_3 = b_1 b_3$ および $a_2 a_3 = b_2 b_3$ より

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{b_3}{a_3}$$

..... ②

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{b_3}{a_3}$$

..... ③

②かつ③より $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ であり，これと①より

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{b_1}{a_1} \quad \text{かつ} \quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{b_2}{a_2}$$

$$a_1^2 = b_1^2 \quad \text{かつ} \quad a_2^2 = b_2^2 \quad \therefore a_1 = b_1 \quad \text{かつ} \quad a_2 = b_2$$

よって，O は P_1Q_1 および P_2Q_2 の中点であるから，

四角形 $P_1P_2Q_1Q_2$ は平行四辺形

である。 P_1, P_2 は辺 AB 上にとったから， $P_1P_2 \parallel Q_1Q_2$ より Q_1, Q_2 は辺 CD 上にあり，

$$AB \parallel CD$$

である。

3 点 P_1, P_2, P_3 を辺 AD 上にとって議論を始めると $AD \parallel BC$ が示されることになるから，

四角形 ABCD は平行四辺形 (答)

である。逆に，平行四辺形ならば，対角線の交点を O にとれば，(i), (ii) を満たす。