

## 図チャレ 第74回 (2007年11月)

$AB + CD = BC + AD$  を満たす凸四角形  $ABCD$  について考える。

- (1)  $AB$  を  $a : b$  に内分する点を  $E$ ,  $BC$  を  $b : c$  に内分する点を  $F$ ,  $CD$  を  $c : d$  に内分する点を  $G$ ,  $DA$  を  $d : a$  に内分する点を  $H$  とする。4点  $E, F, G, H$  を通る円が四角形  $ABCD$  に内接しない例を挙げよ。
- (2)  $AB + CD = BC + AD$  を満たす凸四角形  $ABCD$  は, ある円に外接することを証明せよ。

### 解答

(1) 例えば, 一辺の長さ 3 の正方形で  $a = c = 1, b = d = 2$  のとき。

(2) (i) 四角形  $ABCD$  が平行四辺形するとき,  $AB = CD, BC = AD$  となるから, 条件  $AB + CD = BC + AD$  よりひし形となる。ひし形の対角線の交点から各辺におろした垂線の長さは等しいから, 対角線の交点を中心として各辺に接する円が描ける。

(ii) 四角形  $ABCD$  が平行四辺形でないとき

少なくとも 1 組の対辺が平行でないから,  $AB \not\parallel CD$  としてよい。

$$\angle B + \angle C \neq 180^\circ \text{ かつ } \angle D + \angle A \neq 180^\circ$$

であるが, ともに  $180^\circ$  より大きいと四角形  $ABCD$  の内角の総和が  $360^\circ$  を超えてしまうから,

$$\angle B + \angle C < 180^\circ$$

として一般性を失わない。このとき, 直線  $AB$  と直線  $CD$  は  $A, D$  の側の延長上で交わり, その交点を  $P$  とする。

$\triangle PBC$  には内接円がただ 1 つ存在するから, 辺  $PB, BC, CP$  との接点をそれぞれ  $E, F, G$  とし,  $BE = BF = b, CF = CG = c$  とおく。

$$\begin{aligned} (AB - EB) + (CD - CG) &= AB + CD - b - c \\ &= AB + CD - BC = AD > 0 \end{aligned}$$

より  $AB > EB$  または  $CD > CG$  であるが,

$$AB > EB$$

の場合だけ示せば十分である。このとき,  $A$  から円に引いた接線の接点のうち  $E$  でない方を  $H$  とし, 直線  $AH$  と直線  $PC$  の交点を  $D'$  とすると,

$$AB + CD' = BC + AD'$$

が成り立つから, 条件式  $AB + CD = BC + AD$  と辺々差をとると

$$CD - CD' = AD - AD' \quad \therefore DD' = |AD - AD'|$$

三角不等式の等号成立条件より, 3点  $A, D, D'$  は同一直線上にあり,  $D, D'$  はともに直線  $CP$  上にあるから, 点  $D$  と点  $D'$  は一致する。したがって, 四角形  $ABCD$  は  $\triangle PBC$  の内接円に外接する。 (証明おわり)

