

図チャレ 第75回 (2007年12月)

正方形 ABCD の辺 AB 上に点 P があり, P を中心として辺 CD に接する円と辺 AD, BC との交点をそれぞれ Q, R とする。ただし, P = A のときは Q = D, R = B とし, P = B のときは Q = A, R = C とする。

点 P が辺 AB 上を動くとき, $\theta = \angle QPR$ のとり得る値の範囲を求めよ。

解答

座標平面上で A(0, 0), B(1, 0), C(1, 1), D(0, 1) としても, 一般性を損なうことなく $\theta = \angle QPR$ のとり得る値の範囲を求めることができる。

P(x, 0) ($0 \leq x \leq 1$) とおくと,

$$\vec{PQ} = (-x, \sqrt{1-x^2})$$

$$\vec{PR} = (1-x, \sqrt{1-(1-x)^2}) = (1-x, \sqrt{2x-x^2})$$

$|\vec{PQ}| = |\vec{PR}| = 1$ より

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \vec{PQ} \cdot \vec{PR} = -x(1-x) + \sqrt{1-x^2} \sqrt{2x-x^2} \\ &= x^2 - x + \sqrt{x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x} \end{aligned}$$

この式を $f(x)$ とおくと, $0 < x < 1$ において

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - 1 + \frac{4x^3 - 6x^2 - 2x + 2}{2\sqrt{1-x^2}\sqrt{2x-x^2}} \\ &= 2x - 1 + \frac{(2x-1)(x^2-x-1)}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{2x-x^2}} \\ &= \frac{(2x-1)\{(1-x^2)(2x-x^2) - (x^2-x-1)^2\}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{2x-x^2}(\sqrt{1-x^2}\sqrt{2x-x^2} - x^2 + x + 1)} \\ &= \frac{-(2x-1)}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{2x-x^2}(\sqrt{1-x^2}\sqrt{2x-x^2} - x^2 + x + 1)} \end{aligned}$$

$0 < x < 1$ でつねに $-x^2 + x + 1 = -x(x-1) + 1 > 0$ であるから,

$f'(x)$ は $-(2x-1)$ と同符号

であり,

$f(x)$ は $x = \frac{1}{2}$ で極大かつ最大

である。 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $f(0) = f(1) = 0$ より, $f(x)$ のとり得る値の範囲は

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$$

であり, $0 \leq \theta \leq \pi$ において $\cos \theta$ は単調減少であるから, $\theta = \angle QPR$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (\text{答})$$

である。