

図チャレ 第76回 (2008年1月)

楕円に外接する等脚台形の上底と下底(平行な2辺)が長軸に平行であるとき、上底と下底の長さの積は長軸の長さの平方に等しいことを示せ。

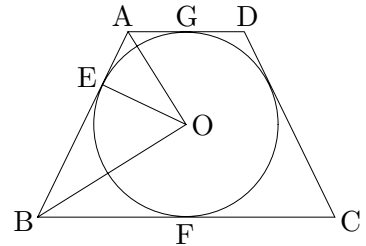
解答

短軸方向にのみ図形全体を拡大しても、等脚台形の上底と下底、および楕円の長軸の長さは変わらないから、円の場合で題意を示せば十分である。

Oを中心とする円が等脚台形ABCDに内接しているものとし、 $AD \parallel BC$ のとき、辺AB, BC, DAと円との接点をそれぞれE, F, Gとする。

円外の点からひいた接線の(接点までの)長さは等しいから

$$AE = AG, BE = BF \quad \dots\dots \textcircled{1}$$



である。

OAは $\angle DAB$ の二等分線、OBは $\angle ABC$ の二等分線であり、平行線の同側内角の和が 180° であるから

$$\angle OAB + \angle OBA = 90^\circ$$

となつて

$$\triangle AEO \sim \triangle OEB$$

が成り立つから、

$$AE : EO = OE : EB \quad \therefore AE \cdot BE = OE^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$AD \cdot BC = (2AE)(2BE) = (2OE)^2 = (\text{直径})^2$$

(証明おわり)

数式処理による解法

xy 平面上において、楕円の方程式を

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b \text{ は正の定数})$$

とし、等脚台形の上底と下底が直線 $y = \pm b$ 上にあるとすると、他の2辺がそれぞれ点

$$(a \cos \theta, b \sin \theta), (a \cos(\pi - \theta), b \sin(\pi - \theta)) \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

において接するものとして一般性を失わない。

点 $(a \cos \theta, b \sin \theta)$ における楕円の接線の方程式は

$$\frac{\cos \theta}{a}x + \frac{\sin \theta}{b}y = 1$$

であり、 $y = b$ とおくと

$$\frac{\cos \theta}{a}x = 1 - \sin \theta \quad \therefore x = \frac{a}{\cos \theta}(1 - \sin \theta)$$

$y = -b$ とおくと

$$\frac{\cos \theta}{a}x = 1 + \sin \theta \quad \therefore x = \frac{a}{\cos \theta}(1 + \sin \theta)$$

対称性を考えて、

$$\begin{aligned} (\text{上底の長さ}) \times (\text{下底の長さ}) &= \frac{2a}{\cos \theta}(1 - \sin \theta) \times \frac{2a}{\cos \theta}(1 + \sin \theta) \\ &= (2a)^2 \times \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\ &= (2a)^2 \end{aligned}$$

(証明おわり)

(注) 上底と下底が短軸に平行であれば、上底と下底の長さの積は、短軸の長さの平方に等しくなる。