

図チャレ 第 77 回 (2008 年 2 月)

底面が半径 1 の円，高さが 2 である直円錐が水平面上に，母線で接するように置かれている。この直円錐を水平面上で滑らないようにころがしたときに通過する領域 D の体積 V を求めよ。

解答

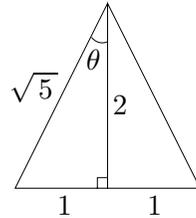
軸と母線がなす角を θ とすると

$$\tan \theta = \frac{1}{2}, \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = \frac{3}{5},$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{5},$$

$$\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{4}{3}$$



題意の水平面を xy 平面として， $z \geq 0$ の部分に直円錐を置き，頂点が原点に，直円錐の軸が xz 平面上 $x \geq 0$ の部分にくるように置く。このときの直円錐を z 軸のまわりに回転させてできる領域が D (と合同な図形) である。

回転させる前の底面の円の中心は

$$(2 \cos \theta, 0, 2 \sin \theta) = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

であり，底面の円板は

$$\begin{cases} \left(x - \frac{4}{\sqrt{5}} \right)^2 + y^2 + \left(z - \frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 \leq 1 \\ x = \sqrt{5} - \frac{1}{2}z \end{cases}$$

と表される。 x を消去すると

$$\left(\sqrt{5} - \frac{1}{2}z - \frac{4}{\sqrt{5}} \right)^2 + y^2 + \left(z - \frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 \leq 1$$

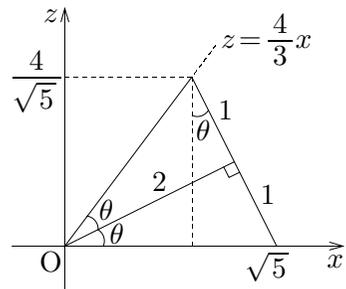
$$\therefore y^2 \leq 1 - \left(\sqrt{5} - \frac{z}{2} - \frac{4}{\sqrt{5}} \right)^2 - \left(z - \frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2$$

また，母線の回転面による空洞部分は $x^2 + y^2 < \left(\frac{3}{4}z \right)^2$ であるから，領域 D を表す不等式は

$$\left(\frac{3}{4}z \right)^2 \leq x^2 + y^2 \leq \left(\sqrt{5} - \frac{z}{2} \right)^2 + 1 - \left(\sqrt{5} - \frac{z}{2} - \frac{4}{\sqrt{5}} \right)^2 - \left(z - \frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2$$

よって， z 軸に垂直な断面の面積 $S(z)$ は

$$S(z) = \pi \left\{ \left(\sqrt{5} - \frac{z}{2} \right)^2 + 1 - \left(\sqrt{5} - \frac{z}{2} - \frac{4}{\sqrt{5}} \right)^2 - \left(z - \frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 \right\} - \pi \left(\frac{3}{4}z \right)^2$$



$$\begin{aligned}
&= \pi \left\{ 1 + \frac{8}{\sqrt{5}} \left(\sqrt{5} - \frac{z}{2} \right) - \frac{16}{5} - \left(z - \frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 - \frac{9}{16} z^2 \right\} \\
&= \pi \left(5 - \frac{25}{16} z^2 \right)
\end{aligned}$$

D の体積 V は

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{\frac{4}{\sqrt{5}}} S(z) dz \\
&= \pi \int_0^{\frac{4}{\sqrt{5}}} \left(5 - \frac{25}{16} z^2 \right) dz \\
&= \pi \left[5z - \frac{25}{48} z^3 \right]_0^{\frac{4}{\sqrt{5}}} \\
&= \pi \left(5 \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{25}{48} \cdot \frac{64}{5\sqrt{5}} \right) \\
&= \pi \left(4\sqrt{5} - \frac{4}{3}\sqrt{5} \right) \\
&= \frac{8\sqrt{5}}{3} \pi \quad (\text{答})
\end{aligned}$$