

図チャレ 第78回 (2008年3月)

半径1の円Oの円周上に4点A, B, C, Dを, 線分ACと線分BDが円Oの内部の点Eで交わるようにとる. $\triangle ABE$ と $\triangle CDE$ がそれぞれ, 辺の長さ a, b の正三角形であるとき, 次の各問に答えよ.

- (1) 線分BCの長さを求めよ.
- (2) $\frac{b}{a} = t$ とするととき, a を t で表せ.
- (3) $a + b$ が最大となるときの t の値とそのときの $a + b$ の値をそれぞれ求めよ.
- (4) $\triangle ABE$ と $\triangle CDE$ の面積の和の最小値とそのときの t の値を求めよ.

出典: 2008年 同志社大学 理系

解答

- (1) $\triangle ABC$ において, 正弦定理より

$$\frac{BC}{\sin 60^\circ} = 2 \times 1 \quad \therefore BC = \sqrt{3} \quad (\text{答})$$

- (2) $\triangle BCE$ において, 余弦定理より

$$3 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 120^\circ$$

$$\therefore a^2 + ab + b^2 = 3$$

$b = at$ を代入して

$$a^2 + a^2t + a^2t^2 = 3$$

$$a^2(t^2 + t + 1) = 3$$

$$t^2 + t + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ を考えて}$$

$$a = \sqrt{\frac{3}{t^2 + t + 1}} \quad (\text{答})$$

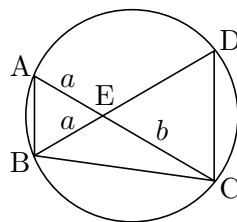
(注) $\triangle ABC$ に余弦定理を適用してもよい。

- (3) (2)を用いると

$$a + b = a(1 + t) = \sqrt{\frac{3(t+1)^2}{t^2 + t + 1}}$$

$$= \sqrt{3 \left(1 + \frac{t}{t^2 + t + 1}\right)}$$

$$= \sqrt{3 \left(1 + \frac{1}{t+1 + \frac{1}{t}}\right)}$$



$t > 0$ であるから，相加・相乗平均の不等式より

$$t + \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} = 2$$

$$\therefore a + b \leq \sqrt{3\left(1 + \frac{1}{2+1}\right)} = 2$$

ここで，不等式の等号は $t = \frac{1}{t} > 0$ すなわち $t = 1$ のとき成り立つから，

$t = 1$ のとき $a + b$ の最大値 2 (答)

(4) $\triangle ABE$ と $\triangle CDE$ の面積和 S は

$$S = \frac{1}{2}a^2 \sin 60^\circ + \frac{1}{2}b^2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2)$$

(2)を用いると

$$a^2 + b^2 = (1 + t^2)a^2 = \frac{3(t^2 + 1)}{t^2 + t + 1} = 3\left(1 - \frac{1}{t + 1 + \frac{1}{t}}\right)$$

と表され，(3)と同様にして $t = 1$ のとき $t + \frac{1}{t}$ は最小値 2 をとるから， S は

$$t = 1 \text{ のとき最小値 } \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 3\left(1 - \frac{1}{2+1}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{答})$$

をとる。