

図チャレ 第 81 回 (2008 年 6 月)

鋭角三角形 ABC において、頂点 C から辺 AB におろした垂線の足を H とし、 CH の延長と外接円の交点を P とする。頂点 A から外心 O へひいた半直線と線分 CP の交点を Q とするとき、 $\triangle ABC \sim \triangle APQ$ であることを示せ。

解答

劣弧 CA に対する円周角に注目すると

$$\angle ABC = \angle APC = \angle APQ \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

AQ の延長と外接円の交点を R とすると、 AR は直径であるから

$$\angle ACR = 90^\circ$$

劣弧 CA に対する円周角に再び注目すると

$$\angle ARC = \angle APC = \angle APH$$

であるから、 $\angle ACR = \angle AHP = 90^\circ$ より

$$\triangle ARC \sim \triangle APH$$

特に、

$$\angle CAR = \angle HAP$$

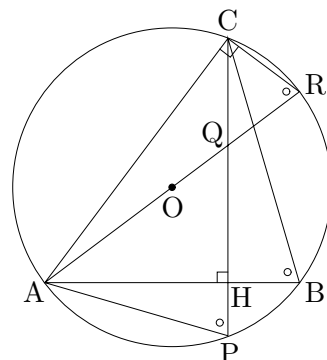
であるから、

$$\angle BAC = \angle BAR + \angle CAR = \angle BAR + \angle HAP = \angle PAQ \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$\triangle ABC \sim \triangle APQ$$

(証明おわり)



(注) 鋭角三角形という仮定は、直径 AR が内角 BAC の内側にあることを保証し、②に活かされている。また、鋭角の円周角に対する円弧は必ず劣弧となる。