

## 図チャレ 第82回(2008年7月)

$\triangle ABC$ の外心を  $O$  とし,  $O$  を辺  $AB, BC, CA$  に関して対称に移した点をそれぞれ  $D, E, F$  とする。 $\triangle DEF$  の外接円が  $\triangle ABC$  の外接円に一致するとき,  $\triangle ABC$  はどのような三角形か。

解答

外接円の半径を  $r$ ,  $AB$  の中点を  $M$  とする。

$M$  は  $OD$  の中点であるから,  $\triangle OAM$  において

$$OA : OM = 2 : 1, \quad \angle OMA = 90^\circ$$

であるから,

$$\angle AOM = 60^\circ$$

$$\therefore \angle AOB = 2\angle AOM = 120^\circ$$

円周角の性質より

$$\angle C = \frac{1}{2}\angle AOB = 60^\circ \text{ または } 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AOB = 120^\circ$$

同様にして,

$$\angle A = 60^\circ \text{ または } 120^\circ, \quad \angle B = 60^\circ \text{ または } 120^\circ$$

以上の  $2^3 = 8$  通りの組合せのうち,

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

となるのは

$$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$$

の場合だけであるから,

$$\triangle ABC \text{ は正三角形 (答)}$$

である。

