

## 図チャレ 第83回 (2008年8月)

座標平面において、 $x$ 軸上に動点  $P$ 、 $y$ 軸上に動点  $Q$  を線分  $PQ$  の長さが 1 となるようにとる。線分  $PQ$  が通過してできる領域  $D$  を図示し、 $D$  の面積  $S$  を求めよ。

コメント：有名問題です。

### 解答

対称性を考慮して、まず  $x \geq 0$ 、 $y \geq 0$  において  $D$  を求める。

$P(t, 0)$ 、 $Q(0, \sqrt{1-t^2})$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) とおく。 $x$  を  $0 \leq x \leq 1$  で固定するとき、線分  $PQ$  (との交点) の通過範囲は

$$x = 0 \text{ のとき } 0 \leq y \leq 1,$$

$$0 < x \leq 1 \text{ のとき } 0 \leq y \leq -\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}(x-t) \quad (t \geq x)$$

となる。そこで、

$$f(t) = -\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}(x-t) \quad (x \leq t \leq 1)$$

とおくと、 $x < t < 1$  において

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\frac{\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}} \cdot t - \sqrt{1-t^2}}{t^2}(x-t) - \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \cdot (-1) \\ &= \frac{t^2 + (1-t^2)}{t^2\sqrt{1-t^2}}(x-t) + \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \\ &= \frac{(x-t) + t(1-t^2)}{t^2\sqrt{1-t^2}} = \frac{x-t^3}{t^2\sqrt{1-t^2}} \end{aligned}$$

$$f'(t) > 0 \iff x > t^3 \iff t < \sqrt[3]{x}$$

であり、

$t$	$x$	$\sqrt[3]{x}$	1
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	0	↗ 極大	↘ 0

よって、 $x \leq t \leq 1$  において

$$0 \leq f(t) \leq f(\sqrt[3]{x}) = -x^{-\frac{1}{3}}\sqrt{1-x^{\frac{2}{3}}}(x-x^{\frac{1}{3}}) = (1-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

となるから、 $x \geq 0$ 、 $y \geq 0$  における領域  $D$  を表す不等式は

$$0 \leq y \leq (1-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

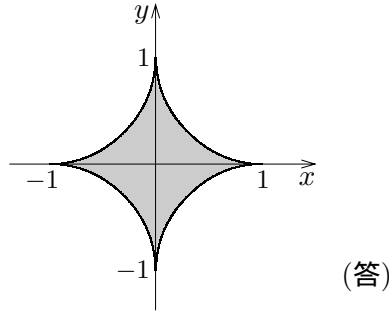
$g(x) = (1-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) とおくと、 $0 < x < 1$  において

$$g'(x) = \frac{3}{2}(1-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right) = -x^{-\frac{1}{3}}(1-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} < 0$$

$$\begin{aligned}
g''(x) &= \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}(1-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2}(1-x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right) \\
&= \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}(1-x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}(1-x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}) \\
&= \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}(1-x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}} > 0
\end{aligned}$$

であるから,  $x \geq 0, y \geq 0$  においてつねに減少, 下に凸である。

$x$  軸,  $y$  軸に関する対称性を考えて, 領域  $D$  を図示すると次図の網目部分(境界を含む)となる。



$x = \sin^3 \theta$  により置換積分して, 領域  $D$  の面積  $S$  を求めると

$$\begin{aligned}
S &= 4 \int_0^1 g(x) dx \\
&= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}} (\sin^3 \theta)' d\theta \\
&= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}} \cdot 3 \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \\
&= 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^4 \theta d\theta \\
&= 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta\right)^2 \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\
&= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4\theta}{2} \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\
&= \frac{3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos 4\theta + \cos 2\theta - \frac{\cos 6\theta + \cos 2\theta}{2}\right) d\theta \\
&= \frac{3}{4} \left[ \theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \sin 2\theta - \frac{1}{12} \sin 6\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{3}{8} \pi \quad (\text{答})
\end{aligned}$$