

図チャレ 第84回 (2008年9月)

xy 平面において、放物線 $y = a - x^2$ の $x \geq 0$ の部分を C とし、 C を直線 $y = x$ に関して対称移動してできる図形を C' とする。 C と C' が異なる 3 点を共有するような a の値の範囲を求めよ。

解答

$$C : y = a - x^2 \quad (x \geq 0) \quad \dots\dots ①$$

を直線 $y = x$ に関して対称に移動した曲線は

$$C' : x = a - y^2 \quad (y \geq 0) \quad \dots\dots ②$$

② - ① より

$$x - y = x^2 - y^2$$

$$(x - y)(x + y - 1) = 0$$

$$\therefore x = y \text{ または } x + y = 1 \quad \dots\dots ③$$

$x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ のもとで

$$① \text{ かつ } ② \iff ① \text{ かつ } ③$$

であり、 C と $y = x$ は $a \geq 0$ ならば必ず (1 点で) 交わるから、題意の条件は

放物線 $y = a - x^2$ が直線 $x + y = 1$ と

$$0 \leq x < \frac{1}{2} \text{ または } \frac{1}{2} < x \leq 1 \text{ において 2 点で交わる}$$

ことと同値である。

$$y = a - x^2 \text{ かつ } x + y = 1$$

から y を消去して、

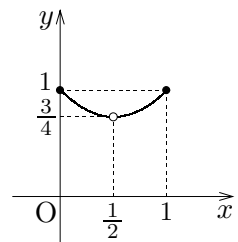
$$a - x^2 = 1 - x \quad \therefore a = x^2 - x + 1$$

$0 \leq x < \frac{1}{2}$ または $\frac{1}{2} < x \leq 1$ における

$$y = x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

のグラフは右図のようになるから、このグラフと直線 $y = a$ が 2 つの共有点をもつような a の範囲を求め、

$$\frac{3}{4} < a \leq 1 \quad (\text{答})$$



別解

$$C : y = a - x^2 \quad (x \geq 0) \quad \dots\dots ①$$

$$C' : x = a - y^2 \quad (y \geq 0) \quad \dots\dots ②$$

② - ① を変形して

$$x = y \text{ または } x + y = 1 \quad \dots\dots ③$$

を導くまでは同じ。

