

図チャレ 第 86 回 (2008 年 11 月)

四角形 ABCD の辺 AB, BC, CD, DA の中点をそれぞれ E, F, G, H とし, $\triangle AEH$, $\triangle BFE$, $\triangle CGF$, $\triangle DHG$ の重心をそれぞれ P, Q, R, S とする。四角形 PQRS が平行四角形ならば, 四角形 ABCD は四角形 PQRS と相似な平行四角形になることを証明せよ。

解答

各点に対する位置ベクトルを小文字で表し,

$$\begin{aligned} A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c}), D(\vec{d}), \\ E(\vec{e}), F(\vec{f}), G(\vec{g}), H(\vec{h}), \\ P(\vec{p}), Q(\vec{q}), R(\vec{r}), S(\vec{s}) \end{aligned}$$

とすると, E, F, G, H はそれぞれ辺 AB, BC, CD, DA の中点であるから

$$\vec{e} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}, \quad \vec{f} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}, \quad \vec{g} = \frac{\vec{c} + \vec{d}}{2}, \quad \vec{h} = \frac{\vec{d} + \vec{a}}{2}$$

重心の公式より

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \frac{\vec{a} + \vec{e} + \vec{h}}{3} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{d}, \\ \vec{q} &= \frac{\vec{b} + \vec{f} + \vec{e}}{3} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}, \\ \vec{r} &= \frac{\vec{c} + \vec{g} + \vec{f}}{3} = \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c} + \frac{1}{6}\vec{d}, \\ \vec{s} &= \frac{\vec{d} + \vec{h} + \vec{g}}{3} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{c} + \frac{2}{3}\vec{d} \end{aligned}$$

であるから,

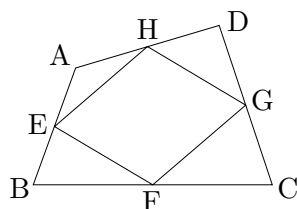
$$\begin{aligned} \vec{q} - \vec{p} &= -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c} - \frac{1}{6}\vec{d} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) + \frac{1}{6}(\vec{c} - \vec{d}) \\ \vec{r} - \vec{s} &= -\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{d} = \frac{1}{6}(\vec{b} - \vec{a}) + \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{d}) \end{aligned}$$

四角形 PQRS は平行四角形であり, $\vec{q} - \vec{p} = \vec{r} - \vec{s}$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) + \frac{1}{6}(\vec{c} - \vec{d}) &= \frac{1}{6}(\vec{b} - \vec{a}) + \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{d}) \\ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)(\vec{b} - \vec{a}) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)(\vec{c} - \vec{d}) \\ \therefore \vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} &= \vec{c} - \vec{d} = \vec{DC} \end{aligned}$$

よって, 四角形 ABCD は平行四角形である。

このとき,



$$\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p} = \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PS} &= \vec{s} - \vec{p} = \left(\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{c} + \frac{2}{3}\vec{d}\right) - \left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{d}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{6}(\vec{b} - \vec{a} + \vec{d}) + \frac{1}{2}\vec{d} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)(\vec{d} - \vec{a}) \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

となるから，平行四辺形 PQRS と平行四辺形 ABCD は相似である。（証明おわり）