

図チャレ 第88回 (2009年1月)

平面 π 上に、一辺の長さ 1 の立方体を置き、平面 π と 45° をなす平行光線をあてるとき、平面 π 上(立方体の外)にできた影の領域の面積の最大値と最小値を求めよ。ただし、平行光線が平面 π と 45° をなすとは、平行光線を構成する各直線が、平面 π へ正射影してできる直線と 45° をなすことを意味する。

解答

平面 π 上にできる影は 2 つ(または 1 つ)の側面の影であり、平面 π に垂直で平行光線に垂直な(もしくは平行光線を含む)平面による断面を考えると、立方体の底面の正方形上の点を端点とする一方向に向いた長さ 1 の線分が掃いてできる図形となる。

平面 π 上で平行光線に垂直な方向の底面の正方形の存在範囲(長さ)を h とすると、影領域の面積 S は 2 つの平行四辺形の面積和であり、

$$S = 1 \times h$$

となる。(影が 1 つの正方形となる場合も成り立つ。)

よって、

h が対角線の長さに等しいとき最大、

h が一辺の長さに等しいとき最小

となるから、面積 S の

最大値は $\sqrt{2}$ 、最小値は 1 (答)

