

図チャレ 第 89 回 (2009 年 2 月)

座標平面上に 2 点 $A(1, 0)$, $B(-3, 0)$ がある。点 $P(x, y)$ が半円 $x^2 + y^2 = 4$ ($y \geq 0$) の上を動くとき, $PA + PB$ の最大値を求めよ。

出典: 1999 年 宇都宮大学

解答

$PA + PB = 2a$ とおくと, 点 P は A, B を焦点とする長半径 a の楕円

$$\frac{(x+1)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-4} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

上にある。点 P は半円

$$x^2 + y^2 = 4 \quad (y \geq 0) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

上の点でもあるから, ①かつ②より y を消去して

$$\begin{aligned} \frac{(x+1)^2}{a^2} + \frac{4-x^2}{a^2-4} &= 1 \\ (a^2-4)(x+1)^2 + a^2(4-x^2) &= a^2(a^2-4) \\ \therefore 4x^2 - 2(a^2-4)x + a^4 - 9a^2 + 4 &= 0 \end{aligned}$$

$2a$ のとり得る値の範囲を求めるために,

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^2 - 2(a^2-4)x + a^4 - 9a^2 + 4 \\ &= 4\left(x - \frac{a^2-4}{4}\right)^2 + \frac{4(a^4 - 9a^2 + 4) - (a^2-4)^2}{4} \\ &= 4\left(x - \frac{a^2-4}{4}\right)^2 + \frac{a^2(3a^2-28)}{4} \end{aligned}$$

とおき, $-2 \leq x \leq 2$ の範囲で $f(x) = 0$ を満たす実数 x が存在する条件を求める。

まず, $a > 2$ (楕円の性質) かつ $\frac{a^2(3a^2-28)}{4} \leq 0$ が必要であり, このとき

$$0 < \frac{a^2-4}{4} \leq \frac{4}{3} \quad (\leq 2)$$

となる。この条件のもとでは

$$f(-2) = a^4 - 5a^2 + 4 = (a^2-1)(a^2-4) > 0$$

となるから, 上の条件だけで十分であり, a のとり得る値の範囲は

$$2 < a \leq \sqrt{\frac{28}{3}} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$$

である。よって,

$$2a = PA + PB \text{ の最大値は } \frac{4\sqrt{21}}{3} \quad (\text{答})$$

である。