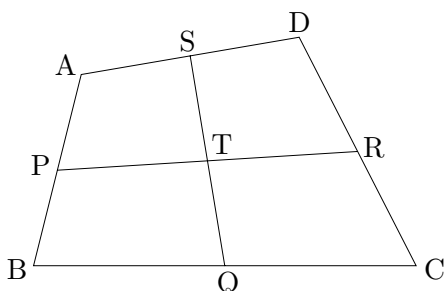


図チャレ 第 91 回 (2009 年 4 月)

四角形 ABCD の各辺の中点を図のように P, Q, R, S とする. また, 線分 PR と QS の交点を T とする.



- (1) T は線分 PR の中点であることを示せ.
- (2) 三角形 ABC の重心を D' としたとき, 3 点 D, T, D' は一直線上にあることを示せ.
- (3) 三角形 ABD, ACD, BCD の重心をそれぞれ C' , B' , A' とする. このとき, 四角形 $A'B'C'D'$ は四角形 ABCD に相似であることを示し, 四角形 ABCD の面積と四角形 $A'B'C'D'$ の面積の比を求めよ.
- (4) 対角線 AC と BD の長さが等しいとき, 線分 PR と QS は直交することを示せ.

出典：2009 年 広島大学 総合科学部

解答

- (1) 中点連結定理より

$$PQ = SR = \frac{1}{2}AC, \quad PS = QR = \frac{1}{2}BD \quad \dots\dots (*)$$

四角形 PQRS は 2 組の対辺の長さが等しいから平行四辺形であり, 対角線 PR, QS は互いに中点で交わる. 特に, T は PR の中点である. (証明おわり)

- (2) (1)の途中で示したように

T は QS の中点

でもある. 直線 DT と線分 AQ の交点を U とすると, $\triangle AQS$ においてメネラウスの定理より

$$\frac{AU}{UQ} \cdot \frac{QT}{TS} \cdot \frac{SD}{DA} = \frac{AU}{UQ} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad \therefore AU : UQ = 2 : 1$$

Q は BC の中点であるから U は $\triangle ABC$ の重心であり,

$$U = D'$$

となるから, 3 点 D, T, D' は一直線上にある。

(証明おわり)

(3) (2)と同様に考えて,

C, T, C' は一直線上,

B, T, B' は一直線上,

A, T, A' は一直線上

にあるから, 四角形 ABCD と四角形 $A'B'C'D'$ は T を中心として相似である。

$\triangle ADD'$ にメネラウスの定理を適用すると

$$\frac{DT}{TD'} \cdot \frac{D'Q}{QA} \cdot \frac{AS}{SD} = \frac{DT}{D'T} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} = 1 \quad \therefore DT : D'T = 3 : 1$$

であるから相似比は 3 : 1 であり,

$$\begin{aligned} (\text{四角形 ABCD の面積}) : (\text{四角形 } A'B'C'D' \text{ の面積}) &= 3^2 : 1^2 \\ &= 9 : 1 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(4) $AC = BD$ のとき, (*)より

$$PQ = QR = RS = SP$$

となるから, ひし形の対角線 PR, QS は直交する。

(証明おわり)