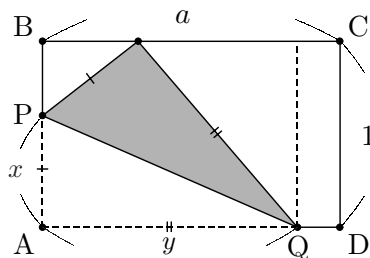


図チャレ 第92回 (2009年5月)

図のような長方形の紙 ABCD がある。辺 AB の長さを 1、辺 AD の長さを a として、 $a > 1$ を満たすものとする。辺 AB 上の点 P と辺 AD 上の点 Q をとり線分 PQ で紙を折って頂点 A が辺 BC 上に乗るようにする。このとき $AP = x$ 、 $AQ = y$ とおき、以下の問いに答えなさい。

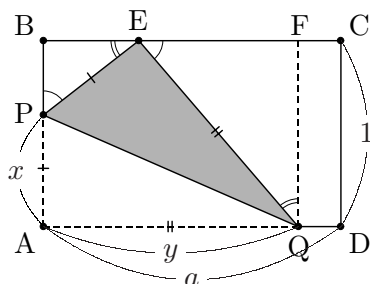


- (1) y と線分 PQ の長さを、それぞれ x を用いて表しなさい。
- (2) x のとり得る値の範囲は $b \leq x \leq 1$ である。 b を求めなさい。
- (3) x が(2)で求めた範囲を動くとき、線分 PQ の長さが最小となる点 P, Q を考える。このときの点 Q が点 D と異なるための a の条件を求めなさい。

出典：2009年 東京理科大学 理工学部

解答

- (1) A が重なる辺 BC 上の点を E、Q から辺 BC におろした垂線の足を F とする。



$\overline{BP} = 1 - x$ 、 $\overline{EP} = x$ であるから、 $\triangle BPE$ において三平方の定理より

$$\overline{BE} = \sqrt{x^2 - (1 - x)^2} = \sqrt{2x - 1} \quad \left(\frac{1}{2} < x \leq 1\right)$$

$\angle PBE = \angle EFQ = \angle PEQ = 90^\circ$ より

$$\angle PEB = \angle EQF$$

であるから、これを θ とおくと、 $\triangle EFQ$ において

$$y = \overline{EQ} = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\overline{PE}}{\overline{BE}} = \frac{x}{\sqrt{2x - 1}} \quad (\text{答})$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{x^2 + y^2} = x \sqrt{1 + \frac{1}{2x - 1}} = \frac{\sqrt{2x}\sqrt{x}}{\sqrt{2x - 1}} \quad (\text{答})$$

(2) $\frac{1}{2} < x \leq 1$ のもとで, $1 \leq y \leq a$ であるから, (1)より

$$1 \leq \frac{x}{\sqrt{2x-1}} \leq a$$

これを同値変形して

$$\sqrt{2x-1} \leq x \leq a\sqrt{2x-1}$$

$$2x-1 \leq x^2 \leq a^2(2x-1)$$

$$x^2 - 2a^2x + a^2 \leq 0$$

($2x-1 \leq x^2$ は任意の実数 x で成り立つ)

$$\therefore (x-a^2)^2 \leq a^4 - a^2$$

$x \leq 1 < a$ より

$$a^2 - x \leq a\sqrt{a^2-1}$$

$$\therefore a(a - \sqrt{a^2-1}) \leq x (\leq 1)$$

よって, 求める値 b は

$$b = a(a - \sqrt{a^2-1}) \quad (\text{答})$$

(3) $t = \frac{1}{x}$ とおくと, (1)より

$$\frac{1}{\text{PQ}^2} = \frac{2x-1}{2x^3} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) = \frac{1}{2} (2t^2 - t^3) \quad (t \geq 1)$$

この最右辺を $f(t)$ とおくと,

$$f'(t) = \frac{1}{2} (4t - 3t^2) = -\frac{3}{2} t \left(t - \frac{4}{3} \right)$$

$t > 1$ において $f'(t)$ は $-\left(t - \frac{4}{3}\right)$ と同符号であるから,

$t \geq 1$ において $f(t)$ は $t = \frac{4}{3}$ で極大かつ最大

であり,

線分 PQ の長さは $x = \frac{3}{4}$ で最小

である。このとき

$$y = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{2 \cdot \frac{3}{4} - 1}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

であるから, 線分 PQ の長さが最小となる点 Q が点 D と異なるための条件は

$$\frac{3\sqrt{2}}{4} < a \quad (\text{答})$$