

図チャレ 第93回(2009年6月)

正方形 ABCD の辺 AB の中点を E とし, 辺 BC 上に点 F を

$$AB + BF = DF$$

となるようにとるとき,

$$\angle EFD = \angle EFB$$

であることを証明せよ。

解答

〔初等幾何的証明〕

直線 BC と直線 DE の交点を G とすると

$$AE = BE$$

$$\angle AED = \angle BEG \text{ (対頂角)}$$

$$\angle EAD = \angle EBG = 90^\circ$$

であるから, 二角夾辺相等により

$$\triangle AED \cong \triangle BEG$$

が成り立ち, 特に

$$AD = BG, ED = EG$$

$AB + BF = DF$ および $AB = AD = BG$ より

$$GF = BG + BF = DF$$

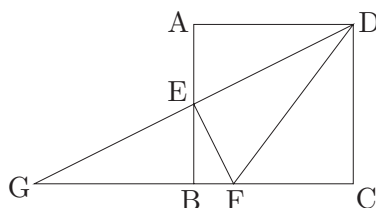
となるから, 三辺相等により

$$\triangle DEF \cong \triangle GEF$$

特に

$$\angle EFD = \angle EFG = \angle EFB$$

(証明おわり)



〔解析的証明〕

座標平面上において $A(0, 1)$, $B(0, 0)$, $C(1, 0)$, $D(1, 1)$, $E\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $F(x, 0)$ とおくと, $AB + BF = DF$ より

$$1 + x = \sqrt{(x-1)^2 + (0-1)^2}$$

$$(x+1)^2 = (x-1)^2 + 1 \quad \therefore x = \frac{1}{4}$$

$\triangle DFE$ および $\triangle EFB$ の辺の長さを求めると

$$DE = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad EF = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{4},$$

$$FD = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1^2} = \frac{5}{4},$$

$$EB = \frac{1}{2}, \quad BF = \frac{1}{4}, \quad FE = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

となって, 3 辺の長さの比は等しいから

$$\triangle DFE \quad \triangle EFB$$

特に

$$\angle DFE = \angle EFB$$

(証明おわり)