

図チャレ 第94回 (2009年7月)

実数 t が $0 < t \leq 1$ の範囲で変化するとき, xy 平面上の直線

$$y = -\frac{\log t}{e^{2t^2}}x + \frac{2\log t + 1}{et}$$

が通過してできる領域を求め, 図示せよ。ただし, e は自然対数の底とする。

解答

x を固定して,

$$f(t) = -\frac{\log t}{e^{2t^2}}x + \frac{2\log t + 1}{et}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\frac{x}{e^2} \cdot \frac{\frac{1}{t} \cdot t^2 - (\log t) \cdot 2t}{t^4} + \frac{1}{e} \cdot \frac{\frac{2}{t} \cdot t - (2\log t + 1) \cdot 1}{t^2} \\ &= -\frac{x}{e^2} \cdot \frac{1 - 2\log t}{t^3} + \frac{1}{e} \cdot \frac{1 - 2\log t}{t^2} \\ &= \frac{(et - x)(1 - 2\log t)}{e^2 t^3} \end{aligned}$$

$0 < t \leq 1$ において, $f'(t)$ は $t - \frac{x}{e}$ と同符号であることに注意する。

(i) $\frac{x}{e} \leq 0$ のとき

$0 < t \leq 1$ でつねに $f'(t) > 0$ であるから $f(t)$ は狭義単調増加であり,

$$\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{-x \log t + 2et \log t + et}{e^{2t^2}} = -\infty, \quad f(1) = \frac{1}{e}$$

であるから, $0 < t \leq 1$ における $f(t)$ の値域は

$$-\infty < f(t) \leq \frac{1}{e}$$

(ii) $0 < \frac{x}{e} \leq 1$ のとき

t	(0)	$\frac{x}{e}$	1
$f'(t)$		- 0 +	
$f(t)$	$(+\infty)$	\searrow 極小 \nearrow	$\frac{1}{e}$

$$f\left(\frac{x}{e}\right) = -\frac{\log x - 1}{x^2}x + \frac{2(\log x - 1) + 1}{x} = \frac{\log x}{x}$$

$0 < t \leq 1$ における $f(t)$ の値域は

$$\frac{\log x}{x} \leq f(t) < +\infty$$

(iii) $\frac{x}{e} > 1$ のとき

$0 < t \leq 1$ でつねに $f'(t) < 0$ であるから $f(t)$ は狭義単調減少であり、 $0 < t \leq 1$ における $f(t)$ の値域は

$$f(1) = \frac{1}{e} \leq f(t) < +\infty$$

$f(t)$ の値域内に y が含まれると考えると、題意の直線の通過領域は

$$\begin{cases} x \leq 0 \text{ のとき} & y \leq \frac{1}{e} \\ 0 < x \leq e \text{ のとき} & y \geq \frac{\log x}{x} \\ x \geq e \text{ のとき} & y \geq \frac{1}{e} \end{cases} \quad (\text{答})$$

ここで、 $g(x) = \frac{\log x}{x}$ ($x > 0$) とおくと、

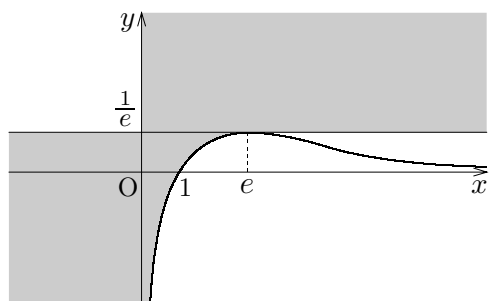
$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (\log x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2} = \frac{\log e - \log x}{x^2}$$

(底) $= e > 1$ より、 $g'(x)$ は $e - x$ と同符号であるから

x	(0)	e	$(+\infty)$
$g'(x)$		+	0 -
$g(x)$	$(-\infty)$	↗ 極大 $\frac{1}{e}$	↘ (0)

以上により、題意の直線の通過領域を xy 平面上に図示すると、次図の網目部分となる。

ただし、境界については y 軸上 $y > \frac{1}{e}$ の部分は含まず、 $y = \frac{1}{e}$ 上 $x \leq 0$ の部分と曲線 $y = \frac{\log x}{x}$ 上は含む。



(答)

(研究) 直線 $y = -\frac{\log t}{e^2 t^2}x + \frac{2\log t + 1}{et}$ が $x = g(t)$ における曲線 $y = f(x)$ の接線

$$y = f'(g(t))\{x - g(t)\} + f(g(t))$$

であるとして、包絡線 $y = f(x)$ を求めてみる。 x, y を固定して

$$F(t) = f'(g(t))\{x - g(t)\} + f(g(t)) - y$$

とおくと、

$$\begin{aligned} F'(t) &= f''(g(t))g'(t)\{x - g(t)\} + f'(g(t))\{-g'(t)\} + f'(g(t))g'(t) \\ &= f''(g(t))g'(t)\{x - g(t)\} \end{aligned}$$

$f'(g(t)) = -\frac{\log t}{e^2 t^2}$ より $f''(g(t))g'(t) \neq 0$ であるから、

$$F(t) = 0 \text{ かつ } F'(t) = 0$$

より

$$x = g(t), \quad y = f(g(t))$$

となる。

$$F(t) = -\frac{\log t}{e^2 t^2}x + \frac{2\log t + 1}{et} - y$$

を t で微分すると、解答の計算より

$$F'(t) = \frac{(et - x)(1 - 2\log t)}{e^2 t^3}$$

$F'(t) = 0$ ($0 < t \leq 1$) より

$$x = g(t) = et$$

$F(t) = 0$ より

$$F(t) = -\frac{\log t}{e^2 t^2} \cdot et + \frac{2\log t + 1}{et} - y = 0$$

$$\therefore y = \frac{-\log t + 2\log t + 1}{et} = \frac{\log t + 1}{et} = \frac{\log et}{et}$$

よって、直線 $y = -\frac{\log t}{e^2 t^2}x + \frac{2\log t + 1}{et}$ は

$$x = et \text{ における曲線 } y = \frac{\log x}{x} \text{ の接線}$$

であり、 $0 < t \leq 1$ のとき接点の x 座標は

$$0 < et \leq e$$

の範囲を動くから、通過領域が解答の結果になることが直観的にわかる。