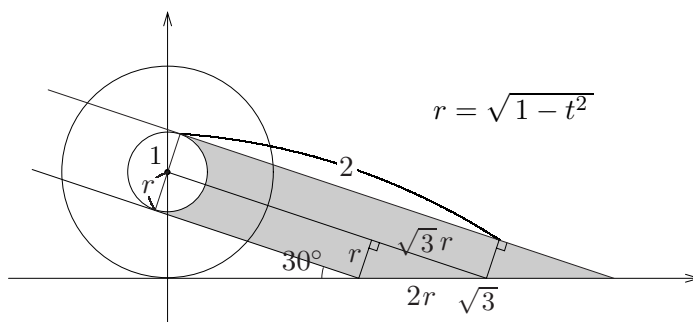


図チャレ 第95回 (2009年8月)

平面の上に置かれた半径1の球に、平面と 30° をなす平行光線を当ててできる(空間領域内で平面より上方にある)影の体積 V を求めよ。

解答

xyz 空間において、 xy 平面上に球 $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1$ が置かれており、平行光線は直線 $x = 0$, $z = (-\tan 30^\circ)y$ に平行であるとする。
平面 $x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$)による断面は次図のようになる。



球の影の断面積 $S(t)$ は、台形の面積から半円の面積を引いて

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} \{ (2 - \sqrt{3}\sqrt{1-t^2}) + (2 + \sqrt{3}\sqrt{1-t^2}) \} \cdot 2\sqrt{1-t^2} - \frac{1}{2}\pi(1-t^2) \\ &= 4\sqrt{1-t^2} - \frac{\pi}{2}(1-t^2) \end{aligned}$$

球の影の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^1 S(t) dt = 2 \int_0^1 S(t) dt \\ &= \int_0^1 \{ 8\sqrt{1-t^2} - \pi(1-t^2) \} dt \\ &= 8 \times \frac{\pi}{4} - \pi \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3}\pi \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(注) 球の体積 $\frac{4}{3}\pi$ と一致するのは偶然である。例えば、平行光線が平面と 45° をなすときは

$$\begin{aligned} S(t) &= 2 \cdot \sqrt{2}\sqrt{1-t^2} - \frac{\pi}{2}(1-t^2) \\ V &= \int_0^1 \{ 4\sqrt{2}\sqrt{1-t^2} - \pi(1-t^2) \} dt \\ &= 4\sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{4} - \pi \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \left(\sqrt{2} - \frac{2}{3} \right) \pi \end{aligned}$$

である。