

## 図チャレ 第96回 (2009年9月)

3つの円  $O_1, O_2, O_3$  は2つずつ互いに外接しており, 円  $O_2$  と円  $O_3$  の接点を  $P_1$ , 円  $O_3$  と円  $O_1$  の接点を  $P_2$ , 円  $O_1$  と円  $O_2$  の接点を  $P_3$  とする。  $\triangle O_1O_2O_3$  の内心と  $\triangle P_1P_2P_3$  の外心は一致することを示せ。

解答

[証明1] 円  $O_1, O_2, O_3$  の半径をそれぞれ  $r_1, r_2, r_3$  とおく。

$\triangle O_1O_2O_3$  の内心を  $I$  とし,  $I$  から辺  $O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2$  に下した垂線の足をそれぞれ  $H_1, H_2, H_3$  とすると,  $H_1, H_2, H_3$  は内接円と各辺との接点であるから

$$\begin{aligned} \overline{O_1H_2} &= \overline{O_1H_3} (= a_1 \text{ とおく}), \\ \overline{O_2H_3} &= \overline{O_2H_1} (= a_2 \text{ とおく}), \\ \overline{O_3H_1} &= \overline{O_3H_2} (= a_3 \text{ とおく}) \\ \therefore \begin{cases} \overline{O_1O_2} = a_1 + a_2 = r_1 + r_2 & \dots\dots ① \\ \overline{O_2O_3} = a_2 + a_3 = r_2 + r_3 & \dots\dots ② \\ \overline{O_3O_1} = a_3 + a_1 = r_3 + r_1 & \dots\dots ③ \end{cases} \end{aligned}$$

(① + ② + ③)  $\div 2$  より

$$a_1 + a_2 + a_3 = r_1 + r_2 + r_3 \quad \dots\dots ④$$

④ - ②, ④ - ③, ④ - ① より

$$a_1 = r_1, \quad a_2 = r_2, \quad a_3 = r_3$$

$$\therefore H_1 = P_1, \quad H_2 = P_2, \quad H_3 = P_3$$

これは, 3点  $P_1, P_2, P_3$  を通る円が  $\triangle O_1O_2O_3$  の各辺と  $P_1, P_2, P_3$  で接することを表すから,  $\triangle O_1O_2O_3$  の内心と  $\triangle P_1P_2P_3$  の外心は一致する。 (証明おわり)

[証明2]  $P_1$  における2円の共通接線を  $l_1$ ,  $P_2$  における共通接線を  $l_2$  とし,  $l_1$  と  $l_2$  の交点を  $A$  とする。さらに, 直線  $AP_3$  と円  $O_1$  が  $P_3$  以外の点  $Q$  で交わるとする。

$P_1, P_2$  は点  $A$  から円  $O_3$  に引いた接線の接点であるから

$$\overline{AP_1} = \overline{AP_2}$$

であり, 点  $A$  に関する円  $O_1$  の方べきについて

$$\overline{AP_2}^2 = \overline{AP_3} \cdot \overline{AQ}$$

が成り立つ。ところが,

$$\overline{AP_1}^2 = \overline{AP_3} \cdot \overline{AQ}$$

も成り立つから, 方べきの定理より

$Q$  は円  $O_2$  上の点

でもあり,  $P_3 \neq Q$  とすれば円  $O_1$  と円  $O_2$  が外接していることに矛盾する。よって,

$$\overline{AP_1} = \overline{AP_2} = \overline{AP_3}, \quad AP_1 \perp O_2O_3, \quad AP_2 \perp O_3O_1, \quad AP_3 \perp O_1O_2$$

であり, 点  $A$  は  $\triangle P_1P_2P_3$  の外心であると同時に  $\triangle O_1O_2O_3$  の内心である。

(証明おわり)