

## 図チャレ 第 97 回 (2009 年 10 月)

三角形 ABC の外側に 3 つの正三角形 BCD, CAE, ABF をつくり, CE の中点を M, FB の中点を N とする。

- (1)  $\triangle AMN \cong \triangle ACF$  を示せ。
- (2) CD の中点を P, AF の中点を Q とするとき, MN と PQ のなす角を求めよ。
- (3) 3 つの正三角形 BCD, CAE, ABF の重心をそれぞれ G, H, I とするとき,  $\triangle GHI$  は正三角形であることを示せ。

解答

- (1) AM は正三角形 ACE の中線であるから

$$AM = \frac{\sqrt{3}}{2} AC$$

AN は正三角形 ABF の中線であるから

$$AN = \frac{\sqrt{3}}{2} AF$$

$$\therefore AM : AN = AC : AF$$

$\angle MAN, \angle CAF$  について

$$\begin{aligned} \angle MAN &= \angle BAN + \angle BAC + \angle CAM \\ &= 30^\circ + \angle BAC + 30^\circ \end{aligned}$$

$$\angle CAF = \angle BAF + \angle BAC = 60^\circ + \angle BAC$$

より

$$\angle MAN = \angle CAF$$

二辺の長さの比と夾角が等しいことより

$$\triangle AMN \cong \triangle ACF$$

(証明おわり)

- (2) (1)より, CF と MN は  $30^\circ$  をなす。(1)と同じ議論により

$$\triangle BPQ \cong \triangle BCF$$

が成り立つから, PQ と CF は  $30^\circ$  をなす。よって, MN と PQ は

$$60^\circ \quad (\text{答})$$

をなす。

- (3)  $\triangle BCD, \triangle ACE, \triangle ABF$  の重心をそれぞれ G, H, I とおく。2点 H, I はそれぞれ AM, AN を 2 : 1 に内分するから,

$$HI \parallel MN$$

同様に, GI  $\parallel$  PQ であるから,

$$\angle GIH = 60^\circ$$

$\angle GHI, \angle HGI$  についても同様であるから,  $\triangle GHI$  は正三角形である。

(証明おわり)

