

図チャレ 第 98 回 (2009 年 11 月)

一辺の長さ 1 の正八面体 $OABCDE$ ($ABCD$, $OAEC$, $OBED$ が正方形) において辺 BC を $k : (1 - k)$ に内分する点を K ($0 < k < 1$) とし, 点 K を通り, 面 OAB に平行な平面を α とする。

- (1) 平面 α が辺 OC , OD と交わる点をそれぞれ F , G とする。 \overrightarrow{OF} , \overrightarrow{OG} を $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ で表せ。
- (2) 正八面体 $OABCDE$ の平面 α による断面積 S を k で表し, $0 < k < 1$ における S の最大値を求めよ。

コメント : 昨年の東大の問題と今年のセンター試験の問題とを融合してみました。

解答

- (1) 平面 OAB と平面 KFG は平行であるから, 特に

$$OB \parallel FK, FG \parallel AB$$

である。 $OB \parallel FK$ より $\triangle OBC \sim \triangle FKC$ であるから,

$$OF : FC = BK : KC = k : (1 - k)$$

であり,

$$\overrightarrow{OF} = k \overrightarrow{OC} = k \vec{c}$$

$FG \parallel AB \parallel CD$ より $\triangle OFG \sim \triangle OCD$ であるから

$$OG : GD = OF : FC = k : (1 - k)$$

であり,

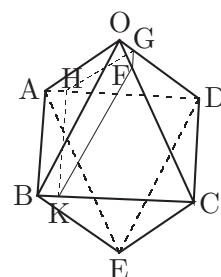
$$\overrightarrow{OG} = k \overrightarrow{OD}$$

ここで, \overrightarrow{OD} を求めると

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$$

であるから,

$$\overrightarrow{OF} = k \vec{c}, \quad \overrightarrow{OG} = k(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b}) \quad (\text{答})$$



- (2) 平面 α と辺 AD , AE , BE との交点をそれぞれ H , I , J とおくと, 正八面体 $OABCDE$ の平面 α による断面は六角形 $FGHIJK$ である。(1) と同様に考えて,

$$KF = GH = 1 - k, \quad FG = k, \quad HK = 1$$

となるから四角形 $KFGH$ は等脚台形であり, その面積 S_1 は

$$S_1 = \frac{1}{2}(k + 1) \cdot (1 - k) \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}(1 - k^2)$$

断面 $FGHIJK$ と面 OAB , 面 CDE は平行であるから, 四角形 $HLJK$ と四角形 $KFGH$ とは k と $1 - k$ が入れ替わった状況になっており, 四角形 $HLJK$ の面積 S_2 は

$$S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \{1 - (1 - k)^2\} = \frac{\sqrt{3}}{4}(2k - k^2)$$

両者あわせて，断面 FGHIJK の面積 S は

$$\begin{aligned} S = S_1 + S_2 &= \frac{\sqrt{3}}{4}(-2k^2 + 2k + 1) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ -2 \left(k - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{2} \right\} \end{aligned}$$

$$\therefore k = \frac{1}{2} \text{ のとき，} S \text{ の最大値 } \frac{3\sqrt{3}}{8} \quad (\text{答})$$

(注) 四角形 KFGH において，KF の延長と GH の延長を L とするとき $\triangle KHL$ は正三角形となるから，2 つの平行線 FG, KH の間の距離は $KF \sin 60^\circ$ (または $GH \sin 60^\circ$) となる。