

図チャレ 第99回 (2009年12月)

四面体 ABCD の内部に点 P があり，辺 AB と平面 PCD との交点を E，辺 BC と平面 PDA との交点を F，辺 CD と平面 PAB との交点を G，辺 DA と平面 PBC との交点を H とするとき，

$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CG}{GD} \cdot \frac{DH}{HA} = 1$$

であることを示せ。

解答

四面体 ABCD の内部の点 P は

$$\overrightarrow{AP} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} + d\overrightarrow{AD} \quad (b > 0, c > 0, d > 0, b + c + d < 1)$$

と表される。

E は辺 AB と平面 PCD の交点であり， $b\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} - c\overrightarrow{AC} - d\overrightarrow{AD}$ であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} &= \frac{b}{1-c-d} \overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AP} - c\overrightarrow{AC} - d\overrightarrow{AD}}{1-c-d} \\ \therefore \frac{AE}{EB} &= \frac{b}{1-b-c-d} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

F は辺 BC と平面 PDA の交点であり， $b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP} - d\overrightarrow{AD}$ であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AF} &= \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{c+b} = \frac{\overrightarrow{AP} - d\overrightarrow{AD}}{b+c} \\ \therefore \frac{BF}{FC} &= \frac{c}{b} \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

G は辺 CD と平面 PAB の交点であり， $c\overrightarrow{AC} + d\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AP} - b\overrightarrow{AB}$ であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} &= \frac{c\overrightarrow{AC} + d\overrightarrow{AD}}{d+c} = \frac{\overrightarrow{AP} - b\overrightarrow{AB}}{c+d} \\ \therefore \frac{CG}{GD} &= \frac{d}{c} \quad \dots\dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

H は辺 DA と平面 PBC の交点であり， $d\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AP} - b\overrightarrow{AB} - c\overrightarrow{AC}$ であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} &= \frac{d}{1-b-c} \overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AP} - b\overrightarrow{AB} - c\overrightarrow{AC}}{1-b-c} \\ \therefore \frac{AH}{HD} &= \frac{d}{1-b-c-d} \quad \dots\dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

①, ②, ③, ④ より

$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CG}{GD} \cdot \frac{DH}{HA} = 1$$

(証明おわり)