

図チャレ 第101回(2010年2月)

辺 AC を斜辺とする直角三角形 ABC の内接円と辺 AB, BC との接点をそれぞれ D, E とする。内接円上に点 F を DF が直径となるようにとり、線分 AE と内接円との交点を G とする。

- (1) 辺 AB の長さを c , 内接円の半径を r とするとき, $\frac{EG}{AE}$ を c, r を用いて表せ。
 (2) 3点 C, F, G が同一直線上にあるような 3 辺の比 $BC : CA : AB$ をすべて求めよ。

解答

- (1) 直角三角形 ABE において三平方の定理より

$$AE^2 = c^2 + r^2$$

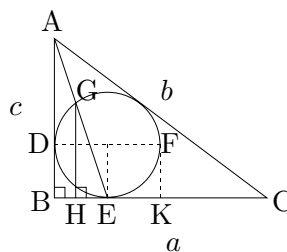
点 A に関する方べきを考えて

$$AE \cdot (AE - EG) = AD^2$$

$$AE^2 \left(1 - \frac{EG}{AE}\right) = AD^2$$

$$(c^2 + r^2) \left(1 - \frac{EG}{AE}\right) = (c - r)^2$$

$$\therefore \frac{EG}{AE} = \frac{2cr}{c^2 + r^2} \quad (\text{答})$$



- (2) $BC = a$, $CA = b$ とおくと, 三平方の定理より

$$c^2 + a^2 = b^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

円外の点から引いた接線の長さが等しいことと

$$BD = BE = r$$

より

$$2r = (AB - AD) + (BC - CE) = AB + BC - CA$$

$$\therefore r = \frac{c + a - b}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

点 G, F から辺 BC に下ろした垂線の足をそれぞれ H, K とおくと, 直角三角形 GHC において

$$\begin{aligned} \tan \angle BCG &= \frac{GH}{CH} = \frac{\frac{2cr}{c^2 + r^2} \cdot c}{a - \left(1 - \frac{2cr}{c^2 + r^2}\right)r} \\ &= \frac{2c^2r}{(a - r)(c^2 + r^2) + 2cr^2} \end{aligned}$$

$$\tan \angle BCF = \frac{FK}{CK} = \frac{r}{a - 2r}$$

3点 C, F, G を同一直線上にあるための条件は

$$\tan \angle BCG = \tan \angle BCF$$

であり,

$$\frac{2c^2}{(a-r)(c^2+r^2)+2cr^2} = \frac{1}{a-2r}$$

$$2c^2(a-2r) = (a-r)(c^2+r^2)+2cr^2$$

②により r を消去すると

$$2c^2(b-c) = \frac{a+b-c}{2}(c^2+r^2)+2cr^2$$

$$\frac{c^2}{2}(4b-4c-a-b+c) = \frac{a+b-c+4c}{2}r^2$$

$$\begin{aligned} 4c^2(3b-3c-a) &= (a+b+3c)(a-b+c)^2 \\ &= (a+b+3c)\{c^2+2(a-b)c+(a-b)^2\} \\ &= 3c^3+(7a-5b)c^2+(5a-b)(a-b)c+(a+b)(a-b)^2 \end{aligned}$$

$$\therefore (11a-17b+15c)c^2+(5a-b)(a-b)c+(a+b)(a-b)^2=0$$

①を用いて変形すると

$$(11a-17b+15c)(b^2-a^2)+(5a-b)(a-b)c+(a+b)(a-b)^2=0$$

$$-(11a-17b+15c)(a+b)+(5a-b)c+(a+b)(a-b)=0$$

$$(-10a+16b-15c)(a+b)+(5a-b)c=0$$

$$(-10a+16b)(a+b)-(10a+16b)c=0$$

$$(-5a+8b)(a+b)=(5a+8b)c > 0$$

$$(-5a+8b)^2(a+b)^2=(5a+8b)^2c^2$$

$$(-5a+8b)^2(a+b)^2=(5a+8b)^2(b^2-a^2)$$

$$(-5a+8b)^2(a+b)+(5a+8b)^2(a-b)=0$$

$$2\{(5a)^2+(8b)^2\}a=4(5a)(8b)b$$

$$25a^2+64b^2=80b^2$$

$$25a^2=16b^2$$

$$\therefore 5a=4b \quad (-5a+8b > 0 \text{ を満たす})$$

①より c も求めて

$$BC : CA : AB = a : b : c = 4 : 5 : 3 \quad (\text{答})$$