

図チャレ 第102回(2010年3月)

Oを原点とする座標平面において、点A(2, 0)および点B(-4, 0)をとり、さらに $\angle OPA = 45^\circ$ を満たし、y座標が正である動点Pを考える。

- (1) 三角形APBの面積が最大となるときの点Pの座標を求めなさい。
- (2) 線分BPの長さが最大となるときの点Pの座標を求めなさい。
- (3) $\angle ABP = \theta$ ($0^\circ < \theta < 180^\circ$)が最大となるときの点Pの座標を求めなさい。

出典：2010年 東京理科大学 工学部

解答

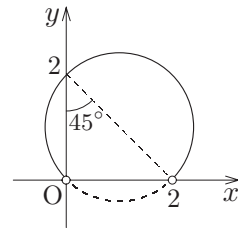
- (1) C(0, 2)をとると $\angle OCA = 45^\circ$ を満たすから、円周角の性質より、動点Pが描く図形は

$$\begin{aligned} &\triangle OAC \text{ の外接円 } (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \\ &\text{ の } y > 0 \text{ の部分} \end{aligned}$$

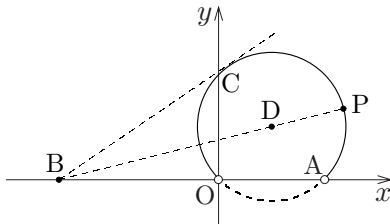
である。

$\triangle APB$ の面積が最大となるのは、点Pから直線AB(x軸)におろした垂線の長さが最大になるときであり、

$$P(1, 1 + \sqrt{2}) \quad (\text{答})$$



- (2)



$\triangle OAC$ の外接円の中心を $D(1, 1)$ とすると、

$$BD = \sqrt{(1+4)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{26}$$

BPの長さが最大となるのは、点PがBDの延長上にあるときであり、そのときPはBDを $\sqrt{26} + \sqrt{2} : \sqrt{2}$ の比に外分するから、

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \frac{-\vec{OB} + (1 + \sqrt{13})\vec{OD}}{(1 + \sqrt{13}) - 1} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{13}}(-4, 0) + \frac{1 + \sqrt{13}}{\sqrt{13}}(1, 1) \\ &= \left(\frac{5 + \sqrt{13}}{\sqrt{13}}, \frac{1 + \sqrt{13}}{\sqrt{13}} \right) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) $\angle ABP$ が最大となるのは、直線 BP が点 P において円に接するときである。このとき $\angle BPD = 90^\circ$ であるから、三平方の定理より

$$BP^2 = BD^2 - DP^2 = 26 - 2 = 24$$

よって、求める点 P は、2 円

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(x + 4)^2 + y^2 = 24 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

の $y > 0$ における交点である。② - ① より

$$10x + 2y + 14 = 22$$

$$\therefore y = -5x + 4 > 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

②かつ③より y を消去して

$$(x + 4)^2 + (-5x + 4)^2 = 24$$

$$26x^2 - 32x + 8 = 0$$

$$13x^2 - 16x + 4 = 0$$

$$\therefore x = \frac{8 \pm 2\sqrt{3}}{13} \quad \text{かつ} \quad x < \frac{4}{5}$$

③に代入して y 座標も求めて

$$P\left(\frac{8 - 2\sqrt{3}}{13}, \frac{12 + 10\sqrt{3}}{13}\right) \quad (\text{答})$$