

図チャレ 第103回(2010年4月)

半径3の球 T_1 と半径1の球 T_2 が、内接した状態で空間に固定されている。

半径1の球 S が次の条件 (A), (B) を同時に満たしながら動く。

(A) S は T_1 の内部にあるか T_1 に内接している。

(B) S は T_2 の外部にあるか T_2 に外接している。

S の中心が存在しうる範囲を D とするとき、立体 D の体積を求めよ。

出典：2010年 大阪大学

解答

座標空間において

$$T_1 : (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad T_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

とすると、

$$D : x^2 + y^2 + z^2 \geq (1+1)^2 \text{ かつ } (x-2)^2 + y^2 + z^2 \leq (3-1)^2$$

であり、 D は xy 平面上で $x^2 + y^2 \geq 4$ かつ $(x-2)^2 + y^2 \leq 4$ で表される領域を x 軸のまわりに回転させてできる立体とみなせるから、体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_1^4 \pi \{4 - (x-2)^2\} dx - \int_1^2 \pi(4 - x^2) dx \\ &= \pi \int_{-1}^2 (4 - x^2) dx - \pi \int_1^2 (4 - x^2) dx \\ &= \pi \int_{-1}^1 (4 - x^2) dx \\ &= 2\pi \int_0^1 (4 - x^2) dx \\ &= 2\pi \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{22}{3}\pi \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(注) 問題文における「球」は球面を意味すると思われる。