

図チャレ 第106回(2010年7月)

座標平面上において、一辺の長さ a の正方形が向かい合う2辺(頂点を除く)で双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ に接するとき、 a のとり得る値の範囲を求めよ。

解答

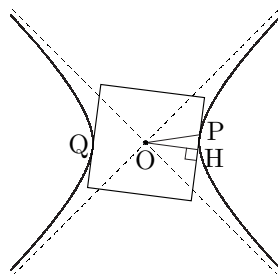
$x \geq 1$ にある接点を P , $x \leq -1$ にある接点を Q とすると、 P における接線と Q における接線は平行であるから、 P と Q は原点 O に関して対称である。

$P(p, q)$ とおくと

$$p^2 - q^2 = 1, \quad p \geq 1 \quad \dots\dots ①$$

であり、 P における接線の方程式は

$$px - qy = 1 \quad \dots\dots ②$$



O から P を含む辺におろした接線の足を H とすると、 OH は接線②に垂直であるから

$$H(pt, -qt) \quad (t > 0)$$

と表され、接線②上にあるから

$$p \cdot pt - q(-qt) = 1 \quad \therefore t = \frac{1}{p^2 + q^2}$$

$$\therefore H\left(\frac{p}{p^2 + q^2}, \frac{-q}{p^2 + q^2}\right) \quad \dots\dots ③$$

$\angle POH$ について

$$\begin{aligned} \cos \angle POH &= \frac{\vec{OP} \cdot \vec{OH}}{|\vec{OP}| |\vec{OH}|} \\ &= \frac{p \cdot \frac{p}{p^2 + q^2} + q \cdot \frac{-q}{p^2 + q^2}}{\sqrt{p^2 + q^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}}} = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} \end{aligned}$$

①, ③より

$$\cos \angle POH = |\vec{OH}|^2$$

$$0 \leq \angle POH < \frac{\pi}{4}, \quad a = 2|\vec{OH}| \text{ より}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} < \left(\frac{a}{2}\right)^2 \leq \cos 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{a^2}{4} \leq 1$$

$$2\sqrt{2} < a^2 \leq 4$$

$$\therefore \sqrt[4]{8} < a \leq 2 \quad (\text{答})$$