

図チャレ 第107回(2010年8月)

座標空間において, 8点 $(1, 1, 0)$, $(-1, 1, 0)$, $(-1, -1, 0)$, $(1, -1, 0)$, $(1, 1, 2)$, $(-1, 1, 2)$, $(-1, -1, 2)$, $(1, -1, 2)$ を頂点とする立方体を R とする。円板 $x^2 + y^2 \leq 2$, $z = 0$ を底面とし, 点 $(0, 0, 2)$ を頂点とする円錐を C とする。

- (1) 平面 $z = t$ ($0 \leq t \leq 2$) による C の断面の円の半径 r を t で表せ。また, $z = t$ による R と C の共通部分の断面が円にならないような t の範囲を求めよ。
- (2) t が(1)の範囲にあるとき, $\cos \theta = \frac{1}{r}$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$) により θ を定め, R と C の共通部分の平面 $z = t$ による断面積 $S(t)$ を θ で表せ。
- (3) R と C の共通部分の体積 V を求めよ。

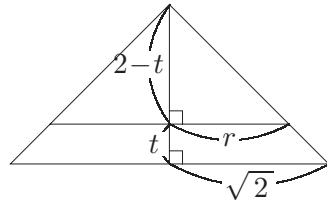
解答

- (1) 相似な直角三角形に注目すると,

$$\frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{2-t}{2}$$

であるから

$$r = \frac{2-t}{\sqrt{2}} \quad (\text{答})$$

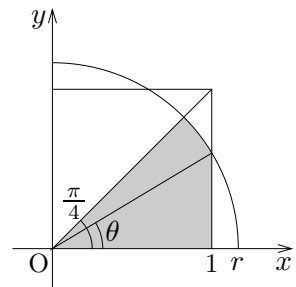


$z = t$ による R と C の共通部分の断面が円にならないのは $1 < r \leq \sqrt{2}$ のときで,
 $\sqrt{2} < 2-t \leq 2 \quad \therefore 0 \leq t < 2-\sqrt{2}$ (答)

- (2) 立方体 R と円錐 C も 4 平面 $y = 0$, $y = x$, $x = 0$, $y = -x$ それぞれに関して対称であるから, $0 \leq y \leq x$ の部分の面積を求めて 8 倍すればよい。直角三角形と扇形に分けて計算することにより,

$$\begin{aligned} \frac{S(t)}{8} &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan \theta + \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) \\ &= \frac{1}{2} \tan \theta + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) \end{aligned}$$

$$\therefore S(t) = 4 \tan \theta + \frac{\pi - 4\theta}{\cos^2 \theta} \quad (\text{答})$$



- (3) (1)より

$$r = \frac{2-t}{\sqrt{2}}$$

であるから,

$$t = 2 - \sqrt{2}r = 2 - \frac{\sqrt{2}}{\cos \theta}$$

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{\sqrt{2}}{\cos^2 \theta} (\cos \theta)' = -\frac{\sqrt{2} \sin \theta}{\cos^2 \theta}$$

よって、 R と C の共通部分の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot \sqrt{2} + \int_0^{2-\sqrt{2}} S(t) dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \pi + \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \left(4 \tan \theta + \frac{\pi - 4\theta}{\cos^2 \theta} \right) \left(-\frac{\sqrt{2} \sin \theta}{\cos^2 \theta} \right) d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \pi + 4\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 \theta}{\cos^3 \theta} d\theta + \sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^0 (\pi - 4\theta) \frac{(\cos \theta)'}{\cos^4 \theta} d\theta \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

ここで、第2項は

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 \theta}{\cos^3 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{\cos^4 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \sin^2 \theta)^2} (\sin \theta)' d\theta$$

$\frac{x^2}{(1-x^2)^2}$ を部分分数分解すると

$$\frac{x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x+1)^2} + \frac{d}{x+1} \quad (a, b, c, d \text{ は定数})$$

と表され、

$$x^2 = a(x+1)^2 + b(x+1)^2(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^2(x+1)$$

両辺 x で微分すると

$$\begin{aligned} 2x &= 2a(x+1) + b\{2(x+1)(x-1) + (x+1)^2\} \\ &\quad + 2c(x-1) + d\{2(x-1)(x+1) + (x-1)^2\} \end{aligned}$$

2式に $x=1$ を代入すると

$$1 = 4a, \quad 2 = 4a + 4b \quad \therefore a = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{1}{4}$$

2式に $x=-1$ を代入すると

$$1 = 4c, \quad -2 = -4c + 4d \quad \therefore c = \frac{1}{4}, \quad d = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 \theta}{\cos^3 \theta} d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \sin^2 \theta)^2} (\sin \theta)' d\theta \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^2}{(1-x^2)^2} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left\{ \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} \right\} dx \\ &= \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \left(-\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} + 1 + \log \left| \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \right| - 0 \right) \\
&= \frac{1}{4} \left\{ \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1) - \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} + \log(1+\sqrt{2})^{-2} \right\} \\
&= \frac{\sqrt{2} - \log(\sqrt{2}+1)}{2} \dots\dots \textcircled{2}
\end{aligned}$$

また、①において第3項は

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{4}}^0 (\pi - 4\theta) \frac{(\cos \theta)'}{\cos^4 \theta} d\theta &= \left[(\pi - 4\theta) \cdot \frac{1}{-3 \cos^3 \theta} \right]_{\frac{\pi}{4}}^0 - \int_{\frac{\pi}{4}}^0 (-4) \cdot \frac{1}{-3 \cos^3 \theta} d\theta \\
&= -\frac{\pi}{3} + \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos \theta}{\cos^4 \theta} d\theta \\
&= -\frac{\pi}{3} + \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sin \theta)'}{(1 - \sin^2 \theta)^2} d\theta \\
&= -\frac{\pi}{3} + \frac{4}{3} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{(1-x^2)^2} dx
\end{aligned}$$

ここで、 $\frac{1}{(1-x^2)^2}$ を部分分数分解すると

$$\frac{1}{(1-x^2)^2} = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x+1)^2} + \frac{d}{x+1} \quad (a, b, c, d \text{ は定数})$$

と表され、

$$1 = a(x+1)^2 + b(x+1)^2(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^2(x+1)$$

両辺 x で微分すると

$$\begin{aligned}
0 &= 2a(x+1) + b\{2(x+1)(x-1) + (x+1)^2\} \\
&\quad + 2c(x-1) + d\{2(x-1)(x+1) + (x-1)^2\}
\end{aligned}$$

2式に $x=1$ を代入すると

$$1 = 4a, \quad 0 = 4a + 4b \quad \therefore a = \frac{1}{4}, \quad b = -\frac{1}{4}$$

2式に $x=-1$ を代入すると

$$1 = 4c, \quad 0 = -4c + 4d \quad \therefore c = \frac{1}{4}, \quad d = \frac{1}{4}$$

よって、

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{\pi}{4}}^0 (\pi - 4\theta) \frac{(\cos \theta)'}{\cos^4 \theta} d\theta + \frac{\pi}{3} \\
&= \frac{4}{3} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{(1-x^2)^2} dx \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left\{ \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} \right\} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \left[-\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \log \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{1}{3} \left(-\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} + 1 + \log \left| \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \right| - 0 \right) \\
&= \frac{1}{3} \left\{ \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1) - \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} + \log(1+\sqrt{2})^2 \right\} \\
&= \frac{2}{3} \{ \sqrt{2} + \log(\sqrt{2}+1) \} \quad \dots\dots \textcircled{3}
\end{aligned}$$

①, ②, ③より

$$\begin{aligned}
V &= \frac{\sqrt{2}}{3} \pi + 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2} - \log(\sqrt{2}+1)}{2} \\
&\quad + \sqrt{2} \left(\frac{2}{3} \{ \sqrt{2} + \log(\sqrt{2}+1) \} - \frac{\pi}{3} \right) \\
&= \frac{16}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \log(\sqrt{2}+1) \quad (\text{答})
\end{aligned}$$