

図チャレ 第108回(2010年9月)

半径1の球面 S 上に定点 A があり, S 上の2つの動点 P, Q は $AP=AQ=\sqrt{3}$ を満たすように動く。このとき, $\triangle APQ$ が通過する領域の体積 V を求めよ。

解答

座標空間において, $A(1, 0, 0)$,

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

であるとしてよい。このとき, 動点 P, Q は球面

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

上にあるから, ①かつ②より

$$-2x + 1 = 2 \quad \therefore x = -\frac{1}{2}$$

したがって, 動点 P, Q は円 $x = -\frac{1}{2}, y^2 + z^2 = \frac{3}{4}$ 上を動くから, $\triangle APQ$ の通過範囲は

底面が半径 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ の円, 高さ $\frac{3}{2}$ の直円錐

である。ゆえに, 求める体積 V は

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{8} \pi \quad (\text{答})$$