

## 図チャレ 第108回(2010年9月)

半径1の球面  $S$  上に定点  $A$  があり,  $S$  上の2つの動点  $P, Q$  は  $AP=AQ=\sqrt{3}$  を満たすように動く。このとき,  $\triangle APQ$  が通過する領域の体積  $V$  を求めよ。

解答

座標空間において,  $A(1, 0, 0)$ ,

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

であるとしてよい。このとき, 動点  $P, Q$  は球面

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

上にあるから, ①かつ②より

$$-2x + 1 = 2 \quad \therefore x = -\frac{1}{2}$$

したがって, 動点  $P, Q$  は円  $x = -\frac{1}{2}, y^2 + z^2 = \frac{3}{4}$  上を動くから,  $\triangle APQ$  の通過範囲は

底面が半径  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  の円, 高さ  $\frac{3}{2}$  の直円錐

である。ゆえに, 求める体積  $V$  は

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{8} \pi \quad (\text{答})$$