

図チャレ 第109回(2010年10月)

2円 C_1, C_2 は点 A で外接し, それぞれの円において A の直径対点を B_1, B_2 とする。A における 2 円の共通接線を ℓ とし, ℓ と異なる共通接線が円 C_1, C_2 と接する点をそれぞれ D_1, D_2 とするとき, 3 直線 B_1D_1, B_2D_2, ℓ は 1 点で交わることを示せ。

解答

直線 B_1D_1 と直線 ℓ の交点を P, 2 接線 D_1D_2, ℓ の交点を E とする。円の外部の点 E から円に引いた接線の長さは等しいから,

$$AE = D_1E = D_2E \quad \dots\dots ①$$

AB_1 は円 C_1 の直径であるから

$$\angle AD_1B_1 = 90^\circ \quad \dots\dots ②$$

D_1 は円 C_1 の接点であるから, 接弦定理より

$$\angle AD_1E = \angle AB_1D_1 \quad \dots\dots ③$$

ℓ が A において円 C_1 に接することより $\angle B_1AP = 90^\circ$ であるから, 直角三角形 APB_1 において

$$\angle EPD_1 = \angle APB_1 = 90^\circ - \angle AB_1D_1 \quad \dots\dots ④$$

②, ③, ④より

$$\angle EPD_1 = 90^\circ - \angle AB_1D_1 = 90^\circ - \angle AD_1E = \angle ED_1P$$

$$\therefore D_1E = PE \quad \dots\dots ⑤$$

①, ⑤より

$$PE = AE$$

直線 B_2D_2 と直線 ℓ の交点を Q として同様の議論を行うと,

$$QE = AE = PE$$

が示されるから,

$$P = Q$$

したがって, 3 直線 B_1D_1, B_2D_2, ℓ は 1 点 P で交わる。

(証明おわり)

