

図チャレ 第110回(2010年11月)

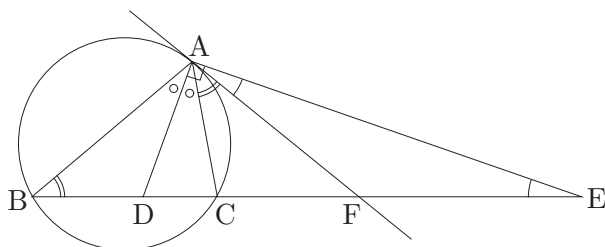
三角形ABCにおいて $\angle A$ の二等分線と辺BCの交点をD, $\angle A$ の外角の二等分線と直線BCとの交点をEとし, 点Aにおける三角形ABCの外接円の接線と直線BCの交点をFとする。

$$\angle ABC = 50^\circ, BC = CA, DF = 2$$

のとき, 次の各問いに答えよ。

- (1) $\angle ADF$ の大きさを求めよ。
- (2) $\angle DAF$ の大きさを求めよ。
- (3) $\angle AED$ の大きさを求めよ。
- (4) AEの長さを求めよ。

解答



BC = CA より

$$\angle BAC = \angle ABC = 50^\circ$$

ADは $\angle BAC$ の二等分線であるから

$$\angle BAD = \angle CAD = 25^\circ$$

- (1) $\triangle ABD$ において, 外角ADFの大きさはそれと隣り合わない内角の大きさの和と等しいから,

$$\angle ADF = \angle ABD + \angle BAD = 50^\circ + 25^\circ = 75^\circ \quad (\text{答})$$

- (2) 接弦定理より

$$\angle CAF = \angle CBA = 50^\circ$$

であるから,

$$\angle DAF = \angle CAD + \angle CAF = 25^\circ + 50^\circ = 75^\circ \quad (\text{答})$$

- (3) 内角の二等分線と外角の二等分線の間隔を考えれば

$$\angle DAE = 90^\circ$$

であるから, (1)より

$$\angle AED = 90^\circ - \angle ADF = 15^\circ \quad (\text{答})$$

- (4) (2)より

$$\angle EAF = 90^\circ - \angle DAF = 15^\circ$$

であるから，(3)の結果とあわせると

$$\angle AEF = \angle EAF$$

となって

$$AF = EF$$

である。また，(1), (2)より

$$AF = DF$$

であるから，

$$DE = DF + EF = 2 \times 2 = 4$$

(1), (2)より

$$\angle AFD = 180^\circ - 75^\circ \times 2 = 30^\circ$$

$\triangle ADF$ において余弦定理より

$$\begin{aligned} AD^2 &= AF^2 + DF^2 - 2AF \cdot DF \cos 30^\circ \\ &= 2^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 8 - 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

$\triangle ADE$ において，三平方の定理より

$$\begin{aligned} AE^2 &= DE^2 - AD^2 \\ &= 4^2 - (8 - 4\sqrt{3}) = 2(4 + 2\sqrt{3}) = 2(\sqrt{3} + 1)^2 \end{aligned}$$

$$\therefore AE = \sqrt{2}(\sqrt{3} + 1) = \sqrt{6} + \sqrt{2} \quad (\text{答})$$

(注) 三角関数の加法定理を用いて $\cos 15^\circ$ を計算することにより， AE の長さを求めることもできる。

$$\begin{aligned} \cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

であるから，直角三角形 ADE において

$$AE = DE \cos 15^\circ = 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \sqrt{6} + \sqrt{2} \quad (\text{答})$$