

図チャレ 第111回(2010年12月)

三角形ABCに内接する円と辺BC, CA, ABとの接点をそれぞれD, E, Fとし, 3点B, C, Dから直線EFにおろした垂線の足をそれぞれP, Q, Rとする。次の各問に答えよ。

- (1) $\triangle BFP \cong \triangle CEQ$ であることを示せ。
- (2) $PR : QR = BF : CE$ が成り立つことを示せ。
- (3) 線分DRは $\angle BRC$ を二等分することを示せ。

解答

- (1) 対頂角が等しいことより

$$\angle BFP = \angle AFE, \quad \angle CEQ = \angle AEF$$

円外の点から引いた接線の長さが等しいことより

$$\triangle AEF \text{ は } AF = AE \text{ を満たす二等辺三角形}$$

であり,

$$\angle AFE = \angle AEF$$

であるから,

$$\angle BFP = \angle CEQ$$

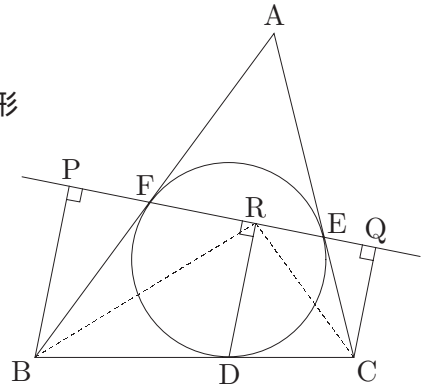
である。また,

$$\angle BPF = \angle CQE = 90^\circ$$

であるから, 2角が等しいことにより

$$\triangle BFP \cong \triangle CEQ$$

が成り立つ。



(証明おわり)

- (2) 3直線BP, DR, CQはそれぞれ直線EFに垂直であるから

$$BP \parallel DR \parallel CQ$$

であり, 平行線を横切る直線はつねに同じ長さの比に切り取られるから,

$$PR : QR = BD : CD$$

円外の点から円に引いた接線の長さは等しく

$$BD = BF, \quad CD = CE$$

であるから,

$$PR : QR = BF : CE$$

(証明おわり)

- (3) (1)より $BP : CQ = BF : CE$ であるから, (2)より

$$BP : CQ = PR : QR$$

$\angle BPR = \angle CQR = 90^\circ$ であるから, 2辺の長さとそのはさむ角が等しいことにより

$$\triangle BPR \cong \triangle CQR$$

特に $\angle BRP = \angle CRQ$ であるから, その余角について

$$\angle BRD = \angle CRD$$

が成り立ち，線分 DR は $\angle BRC$ を 2 等分する。

(証明おわり)

(注) 本問は 06 年度駿台高 2 全国模試で出題された。