

図チャレ 第113回(2011年2月)

原点を中心とする半径1の円が座標平面上にある。この円に内接する正三角形を原点を中心に回転させるとき、この正三角形の第1象限にある部分の面積の最小値と最大値を求めよ。

出典：2001年 岡山大学

解答

(i) 第1象限内に正三角形の頂点がないとき

第1象限内にある辺の中点をPとすると

$$P\left(\frac{1}{2}\cos\theta, \frac{1}{2}\sin\theta\right) \quad \left(\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\right)$$

と表され、点Pを中点とする辺と座標軸との交点は

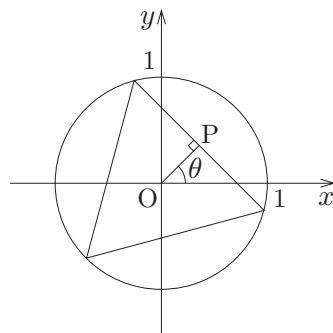
$$\left(\frac{1}{2\cos\theta}, 0\right), \left(0, \frac{1}{2\sin\theta}\right)$$

となるから、第1象限の部分の面積 $S(\theta)$ は

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\cos\theta} \cdot \frac{1}{2\sin\theta} = \frac{1}{4\sin 2\theta}$$

$$\frac{\pi}{3} \leq 2\theta \leq \frac{2}{3}\pi \text{ より}$$

$$\text{最大値 } S\left(\frac{\pi}{6}\right) = S\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad \text{最小値 } S\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$$



(ii) 第1象限内(境界も含む)に正三角形の頂点があるとき

第1象限内にある頂点をQとすると

$$Q(\cos t, \sin t) \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

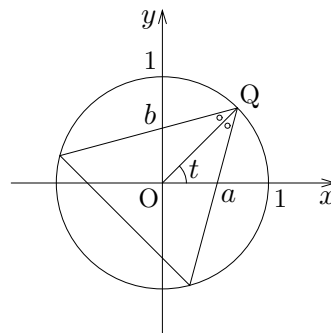
正三角形と x 軸, y 軸との交点をそれぞれ $(a, 0)$,

$(0, b)$ とすると、正弦定理より

$$\frac{a}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sin\left(\frac{5}{6}\pi - t\right)},$$

$$\frac{b}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + t\right)}$$

$$\left(t = 0, \frac{\pi}{2} \text{ のときも成り立つ}\right)$$



第1象限の部分の面積 $T(t)$ は

$$T(t) = \frac{1}{2}a \sin t + \frac{1}{2}b \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{1}{2} \sin t}{\sin \frac{5}{6} \pi \cos t - \cos \frac{5}{6} \pi \sin t} + \frac{\frac{1}{2} \cos t}{\sin \frac{\pi}{3} \cos t + \cos \frac{\pi}{3} \sin t} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{\sin t}{\frac{1}{2} \cos t + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t} + \frac{\cos t}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t} \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin t (\sqrt{3} \cos t + \sin t) + \cos t (\cos t + \sqrt{3} \sin t)}{(\cos t + \sqrt{3} \sin t)(\sqrt{3} \cos t + \sin t)} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2 t + 2\sqrt{3} \sin t \cos t + \cos^2 t}{\sqrt{3} \cos^2 t + 4 \sin t \cos t + \sqrt{3} \sin^2 t} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} \sin 2t + 1}{2 \sin 2t + \sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} (2 \sin 2t + \sqrt{3}) - \frac{1}{2}}{2 \sin 2t + \sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2(2 \sin 2t + \sqrt{3})} \right\}
\end{aligned}$$

$0 \leq 2t \leq \pi$ より

$$\text{最大値 } T\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2 - \sqrt{3}}{2(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} \right\} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2},$$

$$\text{最小値 } T(0) = T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

以上, (i)(ii)より

$$\text{最大値 } \frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \quad \text{最小値 } \frac{1}{4} \quad (\text{答})$$