

図チャレ 第 114 回 (2011 年 3 月)

次の空欄 ~ に適する数を解答欄に記せ。ただし, 分数は既約分数の形で答えよ。

平面 P 上に三角形 ABC があり,

$$AB = AC = 5, \quad BC = 8$$

が成立している。このとき,

$$\cos \angle BAC = \text{ア}, \quad \sin \angle BAC = \text{イ}$$

であり, 三角形 ABC の面積は , 内接円の半径は , 外接円の半径は である。

この三角形 ABC の周 (ただし, 3 頂点 A, B, C は除く) を m とする。平面 P 上に点 X をとり, 点 X を中心として三角形 ABC を 1 回転するとき (回転角 θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲を動くとする), m が少なくとも 1 回通過する点全体が作る領域の面積を $S(X)$, m がちょうど 2 回通過する点の全体が作る領域の面積を $S_2(X)$ とする。

たとえば, X を三角形 ABC の頂点 A にとれば,

$$S(A) = \text{カ}, \quad S_2(A) = \text{キ}$$

となり, X を三角形 ABC の外心 O にとれば,

$$S(O) = \text{ク}, \quad S_2(O) = \text{ケ}$$

となる。また, 点 X が線分 OA (両端点を含む) 上を動くとき,

$$S(X) = S(O)$$

を満たす点 X の全体は, 長さ の線分となる。

出典: 2011 年 日本医科大学

解答

$\triangle ABC$ において余弦定理より

$$\cos \angle BAC = \frac{5^2 + 5^2 - 8^2}{2 \cdot 5 \cdot 5} = \boxed{-\frac{7}{25}} \quad (\text{ア})$$

公式 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ および $\sin \angle BAC > 0$ より

$$\sin \angle BAC = \sqrt{1 - \left(-\frac{7}{25}\right)^2} = \boxed{\frac{24}{25}} \quad (\text{イ})$$

$\triangle ABC$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sin \angle BAC = \boxed{12} \quad (\text{ウ})$$

△ABC の内接円の半径を r とすると

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot r + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot r + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot r = 12 \quad \therefore r = \boxed{\frac{4}{3}} \quad (\text{エ})$$

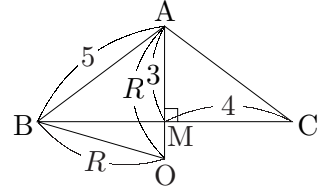
正弦定理より，外接円の半径 R は

$$R = \frac{8}{2 \times \frac{24}{25}} = \boxed{\frac{25}{6}} \quad (\text{オ})$$

点 X を中心として △ABC をちょうど 1 回転させるとき，周 m が通過する領域を $D(X)$ ，ちょうど 2 回通過する点全体が作る領域を $D_2(X)$ と表す。

$D(A)$ は A を中心とする半径 5 の円板， $D_2(A)$ は A を中心とする半径 3 の円の内部 (A を除く) となるから

$$S(A) = \boxed{25\pi} \quad (\text{カ}), \quad S_2(A) = \boxed{9\pi} \quad (\text{キ})$$



外心 O は辺 BC の垂直二等分線上にあり， $D(O)$ は O を中心とする半径 R の円と半径 $R - 3$ の円にはさまれた領域となるから，

$$S(O) = \pi R^2 - \pi(R - 3)^2 = \pi(6R - 9) = \left(6 \cdot \frac{25}{6} - 9\right)\pi = \boxed{16\pi} \quad (\text{ク})$$

O から直線 AB におろした垂線の足を H とすると， $OA = OB$ より H は辺 AB の中点であるから，△OAH において三平方の定理より

$$OH = \sqrt{\left(\frac{25}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5}{6} \sqrt{5^2 - 3^2} = \frac{10}{3}$$

$D_2(O)$ の面積 $S_2(O)$ は

$$S_2(O) = \pi OH^2 - \pi(R - 3)^2 = \left(\frac{10}{3}\right)^2 \pi - \left(\frac{7}{6}\right)^2 \pi = \frac{400 - 49}{6^2} \pi = \boxed{\frac{39}{4} \pi} \quad (\text{ケ})$$

BC の中点を M とし， X が OM 上にあるとき， $MX = x$ とおくと

$$S(X) = \pi XB^2 - \pi XM^2 = \pi(x^2 + 4^2) - \pi x^2 = 16\pi = S(O)$$

X が AM 上 ($X \neq M$) にあるとき，

$$S(X) = \pi BX^2 > \pi BM^2 = 16\pi = S(O)$$

よって，線分 OA 上の点 X で

$$S(X) = S(O)$$

を満たす点 X の全体は線分 OM であり，

$$\text{長さは } \boxed{\frac{7}{6}} \quad (\text{コ})$$

である。