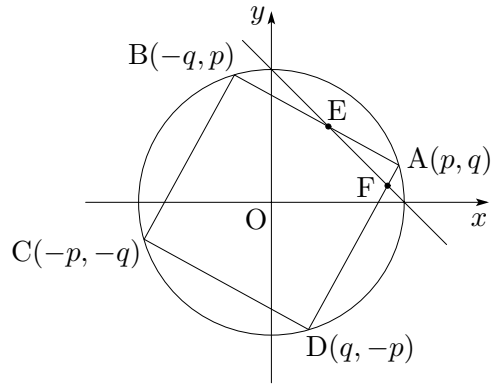


図チャレ 第 115 回 (2011 年 4 月)

座標平面上に $A(p, q)$, $B(-q, p)$, $C(-p, -q)$, $D(q, -p)$ を頂点とする正方形がある。ただし, $p > 0$, $q > 0$, $p^2 + q^2 = 1$ とする。また, 直線 AB , AD が直線 $x + y = 1$ と交わる点をそれぞれ $E(r, s)$, $F(t, u)$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) 直線 AB , AD の方程式を p, q を用いて表せ。
- (2) r, s, t, u を p, q を用いて表せ。
- (3) $k = p + q$ とおくととき, pq を k の式で表せ。また, $k \leq \sqrt{2}$ を示せ。
- (4) $st - ru$ を k の式で表せ。また, $st - ru$ の最小値を求めよ。



出典：2011 年 金沢大学

解答

$$(1) \quad \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} = -(p - q, q + p)$$

より, 直線 AB の方程式は

$$(p - q)(x - p) + (p + q)(y - q) = 0$$

$$\therefore (p - q)x + (p + q)y - p^2 - q^2 = 0 \quad (\text{答}) \quad \dots\dots ①$$

$\overrightarrow{AD} = (-q - p, p - q)$ より直線 AD の方程式は

$$(p + q)(x - p) - (p - q)(y - q) = 0$$

$$\therefore (p + q)x - (p - q)y - p^2 - q^2 = 0 \quad (\text{答}) \quad \dots\dots ②$$

(2) 直線①と

$$x + y = 1 \quad \dots\dots ③$$

の交点は $E(r, 1 - r)$ であるから

$$(p - q)r + (p + q)(1 - r) - p^2 - q^2 = 0$$

$$\therefore r = \frac{p + q - p^2 - q^2}{2q}, \quad s = 1 - r = \frac{p^2 + q^2 - p + q}{2q} \quad (\text{答})$$

②と③の交点は $F(t, 1-t)$ であるから

$$(p+q)t - (p-q)(1-t) - p^2 - q^2 = 0$$
$$\therefore t = \frac{p^2 + q^2 + p - q}{2p}, \quad u = 1 - t = \frac{p + q - p^2 - q^2}{2p} \quad (\text{答})$$

(3) $k = p + q$ とおくと、

$$1 = p^2 + q^2 = (p+q)^2 - 2pq = k^2 - 2pq$$

より

$$pq = \frac{k^2 - 1}{2} \quad (\text{答})$$

$A(p, q)$ は直線 $x + y = k$ と円 $x^2 + y^2 = 1$ の共有点であるから

$$\frac{|0+0-k|}{\sqrt{1^2+1^2}} \leq 1 \quad \therefore |k| \leq \sqrt{2}$$

$k = p + q > 0$ より

$$k \leq \sqrt{2}$$

(おわり)

(注) p, q を 2 解とする 2 次方程式

$$X^2 - kX + \frac{k^2 - 1}{2} = 0$$

の 2 解がともに正となる条件から、 $k \leq \sqrt{2}$ を導いてもよい。

(4) (2)より

$$\begin{aligned} st - ru &= \frac{(p^2 + q^2)^2 - (p - q)^2 - (p + q - p^2 - q^2)^2}{4pq} \\ &= \frac{-(p - q)^2 - (p + q)^2 + 2(p + q)(p^2 + q^2)}{4pq} \\ &= \frac{2(p + q - 1)(p^2 + q^2)}{4pq} \\ &= \frac{2(k - 1) \cdot 1}{4 \cdot \frac{(k + 1)(k - 1)}{2}} = \frac{1}{k + 1} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3)より

$$\frac{1}{k + 1} \geq \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = \sqrt{2} - 1$$

であり、不等式の等号は $p = q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき成り立つから、

$$st - ru = \frac{1}{k + 1} \text{ の最小値は } \sqrt{2} - 1 \quad (\text{答})$$

(注) $\frac{1}{2}(st - ru)$ は $\triangle OEF$ の面積を表す。