

図チャレ 第116回(2011年5月)

$\triangle ABC$ は $AB = AC$ の 2 等辺三角形とする。D を辺 BC 上の点とし、AD の延長線が $\triangle ABC$ の外接円と交わる点を P とする。次の問いに答えよ。

問 1 $AP = BP + CP$ であるとき、 $\triangle ABC$ は正三角形であることを示せ。

問 2 $\frac{1}{BP} + \frac{1}{CP} = \frac{1}{DP}$ であるとき、 $\triangle ABC$ は正三角形であることを示せ。

出典：2011 年 旭川医科大学

解答

$BC = a$, $AB = AC = b$, $BP = x$, $CP = y$ とおく。

円周角の性質より

$$\angle ABC = \angle APC, \quad \angle ACB = \angle APB$$

$AB = AC$ より $\angle ABC = \angle ACB$ であるから、

$$\angle APB = \angle APC$$

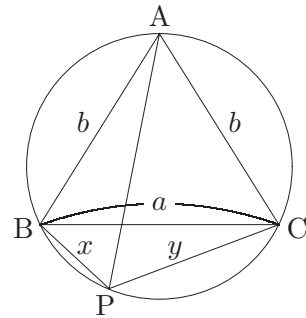
$\triangle ABP$ および $\triangle ACP$ において余弦定理より

$$\frac{x^2 + AP^2 - b^2}{2x \cdot AP} = \frac{y^2 + AP^2 - b^2}{2y \cdot AP}$$

$$y(x^2 + AP^2 - b^2) = x(y^2 + AP^2 - b^2)$$

$$xy(x - y) - AP^2(x - y) + b^2(x - y) = 0$$

$$\therefore (x - y)(xy + b^2 - AP^2) = 0 \quad \dots\dots (*)$$



問 1 $AP = BP + CP = x + y$ であるとするとき、(*)より

$$x = y \quad \text{または} \quad AP^2 = (x + y)^2 = xy + b^2$$

(i) $(x + y)^2 = xy + b^2$ のとき

$\triangle ABC$ および $\triangle ABP$ において余弦定理より

$$\frac{a^2 + b^2 - b^2}{2ab} = \cos \angle ACB = \cos \angle APB = \frac{x^2 + (x + y)^2 - b^2}{2x(x + y)}$$

$$\frac{a}{2b} = \frac{x^2 + (xy + b^2) - b^2}{2x(x + y)}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{x^2 + xy}{x(x + y)} = 1$$

$$\therefore a = b$$

(ii) $x = y$ のとき

$\triangle ABP \cong \triangle ACP$ (3 辺相等) であるから

$$\angle ABP = \angle ACP$$

円に内接する四角形の対角は互いに補角であるから

$$\angle ABP = \angle ACP = 90^\circ$$

直角三角形 ABP および ACP において三角比を考えて、

$$\cos \angle APB = \cos \angle APC = \frac{BP}{AP} = \frac{BP}{BP + CP} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

より

$$\angle APB = \angle APC = 60^\circ$$

$\angle ABC = \angle APC$, $\angle ACB = \angle APB$ であるから, $\triangle ABC$ は正三角形である。

(証明おわり)

問 2 $x = y$ のとき $\triangle ABC$ が正三角形であることは既に示されているので, (*)より

$$AP^2 = xy + b^2 \quad \text{かつ} \quad \frac{1}{BP} + \frac{1}{CP} = \frac{1}{DP}$$

のとき示せば十分である。

$\angle BAC + \angle BPC = 180^\circ$ であるから, 補角の公式より

$$\sin \angle BAC = \sin \angle BPC$$

$\triangle ABC$ と $\triangle BCP$ の面積比を, 面積公式と辺 BC が共通であることから 2 通りに考えると,

$$\frac{AB \cdot AC}{BP \cdot CP} = \frac{AD}{DP}$$

$$\frac{1}{DP} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y+x}{xy} \quad \text{より}$$

$$DP = \frac{xy}{x+y}, \quad AD = \frac{AB \cdot AC}{BP \cdot CP} DP = \frac{b^2}{xy} \cdot \frac{xy}{x+y} = \frac{b^2}{x+y}$$

$$AP = AD + DP = \frac{b^2 + xy}{x+y} = \frac{AP^2}{x+y}$$

$$\therefore AP = x + y$$

問 1 の仮定を満たすから, $\triangle ABC$ は正三角形である。

(証明おわり)