

図チャレ 第 118 回 (2011 年 7 月)

座標平面上において，行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換を f とし， $P(1, -1)$ ， $Q(1, -2)$ とする。

- (1) 点 P および点 Q の f による像を求めよ。
- (2) $\triangle OPQ$ (の周および内部) が f によって移される図形を図示せよ。また，面積は何倍になるか。
- (3) f により不動である直線をすべて求めよ。

解答

- (1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ ， $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ より
 P の像は点 $(2, -2)$ ， Q の像は点 $(3, -6)$ (答)

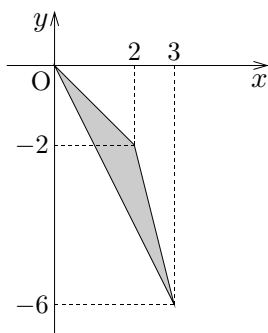
- (2) $\triangle OPQ$ は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (s \geq 0, t \geq 0, s + t \leq 1)$$

と表され， f による像は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = sA \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + tA \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 3t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (s \geq 0, t \geq 0, s + t \leq 1)$$

すなわち， $(0, 0)$ ， $(2, -2)$ ， $(3, -6)$ を頂点とする三角形の周および内部となる。これを図示すると



(答)

の網目部分となり，面積公式により，面積は

$$2 \times 3 = 6 \text{ 倍 (答)}$$

になることがわかる。

- (注) 本問は，固有ベクトルに座標変換することにより，行列式が(三角形を 2 倍にした)平行四辺形の代数的面積もしくは面積比を表すことを教えてくれる。

そのように考えると、行列式の関係式

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)$$

も直観的に理解することができる。この関係式を公式と割り切って

$$\left| \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right| = 6 \text{ 倍}$$

と答えても解答としては正解であるが、「鶏を割くのに牛刀を用いる」ようなものである。

(3) 2つのベクトル $(1, -1)$, $(1, -2)$ は1次独立であるから、任意のベクトルはその線型結合で表される。特に、不動直線の方法ベクトルは

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta \text{ は実数で, } (\alpha, \beta) \neq (0, 0))$$

と表される。不動直線であることより

$$A \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} = \alpha A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 3\beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

もまた同じ直線の方法ベクトル(平行)であるから、(1次独立性を考慮して)

$$\beta = 0 \text{ または } \alpha = 0$$

よって、不動直線の方法ベクトル方程式は

$$(i) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (a \text{ は定数, } t \text{ は変数})$$

または

$$(ii) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (b \text{ は定数, } t \text{ は変数})$$

と表される。

(i)のとき、 f による像は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 3t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

であるから、不動直線となる条件は

$$2a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \therefore a = 0$$

(ii)のとき、 f による像は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3b \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 2t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

であるから、不動直線となる条件は

$$3b \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \therefore b = 0$$

以上により、 f の不動直線は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ または } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

すなわち

$$y = -2x, \quad y = -x \quad (\text{答})$$

ですべてである。