

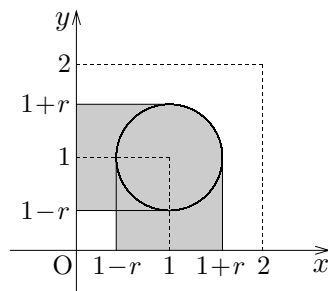
図チャレ 第 119 回 (2011 年 8 月)

座標空間において $A(1, 1, 0)$, $B(-1, 1, 0)$, $C(-1, -1, 0)$, $D(1, -1, 0)$ とし, 正方形 $ABCD$ の周上を点 P が動くとき, P を中心とする半径 1 の球が通過してできる領域の体積 V を求めよ。

解答

題意の通過領域は各座標平面に関して対称であるから, $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ の部分の体積を求めて 8 倍すればよい。

平面 $z = t$ ($0 \leq t \leq 1$) 上では, 球の切り口は半径 $r = \sqrt{1 - t^2}$ の円であり, 通過領域の $x \geq 0, y \geq 0$ における断面は右図のようになるから, 断面積 $S(t)$ は



$$\begin{aligned} S(t) &= 1^2 - (1 - r)^2 + 1 \cdot r \times 2 + \pi r^2 \times \frac{1}{4} \\ &= 4\sqrt{1 - t^2} + \left(\frac{\pi}{4} - 1\right)(1 - t^2) \end{aligned}$$

求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= 8 \int_0^1 S(t) dt \\ &= 32 \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt + \left(\frac{\pi}{4} - 1\right) \int_0^1 (1 - t^2) dt \\ &= 32 \times \pi \cdot 1^2 \times \frac{1}{4} + \left(\frac{\pi}{4} - 1\right) \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 \\ &= 8\pi + \left(\frac{\pi}{4} - 1\right) \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{49\pi - 4}{6} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$