

## 図チャレ 第120回(2011年9月)

三角形ABCの内接円と辺BC, CA, ABとの接点をそれぞれD, E, Fとする。三角形ABEの内接円と三角形ACFの内接円が一致するならば, ADとBCは垂直であることを示せ。

解答

D, E, Fは $\triangle ABC$ の内接円の接点であるから,

$$AE = AF, BF = BD, CD = CE$$

$$\therefore \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

チェバの定理(の逆)より, 3線分AD, BE, CFは1点で交わり, その交点をGとおく。

$\triangle ABE$ の内接円と $\triangle ACF$ の内接円が一致するならば, その円は四角形AFGEの各辺と接する。辺EA, AF, FG, GEとの接点をそれぞれK, L, M, Nとおくと,

$$AK = AL, FL = FM, GM = GN, EN = EK$$

が成り立つ。AE = AK + EK と AF = AL + FLの長さは等しいから

$$EK = FL$$

であり, したがって

$$FG = FM + GM = FL + GM = EK + GN = EN + GN = EG$$

$\triangle AEG$ と $\triangle AFG$ について, 3辺相等により

$$\triangle AEG \cong \triangle AFG, \text{ 特に } \angle GAE = \angle GAF$$

よって, AD上に $\triangle ABC$ の内心はあるが, Dはその内接円と辺BCとの接点であるから, ADとBCは垂直である。 (証明おわり)

(注) ADとBCが垂直であるとき, 2角狭辺相等により

$$\triangle ABD \cong \triangle ACD$$

となり, 特にAB = ACとなる。

