

## 図チャレ 第 121 回 (2011 年 10 月)

正四面体 OABC の辺 OA, OB, OC 上にそれぞれ点 D, E, F をとる。

- (1)  $\triangle DEF$  が正三角形となるのは, 面 DEF が面 ABC に平行のときに限られるか。  
 (2)  $\triangle DEF$  が直角二等辺三角形になることはあるか。

### 解答

OD = x, OE = y, OF = z とおくと,  $\triangle ODE$ ,  $\triangle OEF$ ,  $\triangle OFD$  にそれぞれ余弦定理を適用すると

$$DE^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 60^\circ = x^2 - xy + y^2$$

$$EF^2 = y^2 - yz + z^2$$

$$FD^2 = z^2 - zx + x^2$$

- (1)  $\triangle DEF$  が正三角形ならば,

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = y^2 - yz + z^2 & \dots\dots ① \\ y^2 - yz + z^2 = z^2 - zx + x^2 & \dots\dots ② \end{cases}$$

①より

$$x^2 - z^2 - y(x - z) = (x - z)(x + z - y) = 0$$

$$\therefore x = z \text{ または } x + z = y$$

②より

$$x^2 - y^2 - z(x - y) = (x - y)(x + y - z) = 0$$

$$\therefore x = y \text{ または } x + y = z$$

ここで,

$$x = z \text{ かつ } x + y = z \iff y = 0$$

$$x + z = y \text{ かつ } x = y \iff z = 0$$

$$x + z = y \text{ かつ } x + y = z \iff y = z \text{ かつ } x = 0$$

であるから,  $x > 0, y > 0, z > 0$  より

$$x = y = z$$

すなわち

面 DEF と面 ABC が平行の場合に限られる。(答)

- (2)  $\triangle DEF$  が直角二等辺三角形であるとき,  $DE = EF, FD = \sqrt{2} DE$  であるとして一般性を失わない。このとき

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = y^2 - yz + z^2 & \dots\dots ③ \\ z^2 - zx + x^2 = 2(x^2 - xy + y^2) & \dots\dots ④ \end{cases}$$

③より

$$x = z \text{ または } x + z = y \quad (\text{①と同じ})$$

1°  $x = z$  のとき

④より

$$x^2 = 2(x^2 - xy + y^2)$$

$$\therefore x^2 - 2xy + 2y^2 = (x - y)^2 + y^2 = 0$$

$x, y$  は実数であるから, このとき  $x = y = 0$  となって不可能である。

2°  $x + z = y$  のとき

④より

$$z^2 - zx + x^2 = 2\{x^2 - x(x + z) + (x + z)^2\} = 2(x^2 + xz + z^2)$$

$$\therefore x^2 + 3xz + z^2 = 0$$

$x > 0, z > 0$  であるから, これは不可能である。

1°, 2° より

$\triangle DEF$  が直角二等辺三角形になることはない。(答)