

図チャレ 第122回(2011年11月)

- (1) 三角形 ABC の内部に点 P があり, 辺 BC, CA, AB 上(端点は除く)にそれぞれ点 D, E, F をとる。4 点 A, F, P, E を通る円と 4 点 B, D, P, F を通る円があるとき, 4 点 C, E, P, D は同一円周上にあることを示せ。
- (2) 点 P を通る 3 つの円 K_1, K_2, K_3 があり, K_2 と K_3 は点 P 以外に点 D で交わり, K_3 と K_1 は点 P 以外に点 E で交わり, K_1 と K_2 は点 P 以外に点 F で交わる。円 K_1 の(点 P を含まない)弧 EF 上に点 A をとり, AF の延長と円 K_2 との交点を B, AE の延長と円 K_3 との交点を C とする。このとき, 3 点 B, C, D は同一直線上にあることを示せ。

解答

- (1) $\angle CAB = \alpha, \angle ABC = \beta, \angle BCA = \gamma$ とおくと,
 $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ …… ①

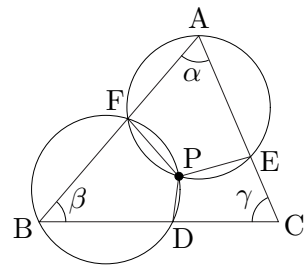
4 点 A, F, P, E は同一円周上にあるから,
 $\angle EPF = 180^\circ - \alpha$ …… ②

4 点 B, D, P, F は同一円周上にあるから,
 $\angle FPD = 180^\circ - \beta$ …… ③

①, ②, ③より

$$\angle DPE = 360^\circ - \angle EPF - \angle FPD = \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$$

よって, 4 点 C, E, P, D は同一円周上にある。 (証明おわり)



- (2) 四角形 AFPE は円 K_1 に内接するから,

$$\angle AFP = \theta$$

とおくと

$$\angle AEP = 180^\circ - \theta$$

このとき

$$\angle BFP = 180^\circ - \theta, \angle CEP = \theta$$

四角形 BDPF が円 K_2 に内接するから,

$$\angle BDP = 180^\circ - \angle BFP = \theta$$

四角形 CEPD が円 K_3 に内接するから,

$$\angle CDP = 180^\circ - \angle CEP = 180^\circ - \theta$$

$$\therefore \angle BDP + \angle CDP = 180^\circ$$

よって, 2 直線 BD, CD は同一直線となり, 3 点 B, C, D は同一直線上にある。

(証明おわり)

