

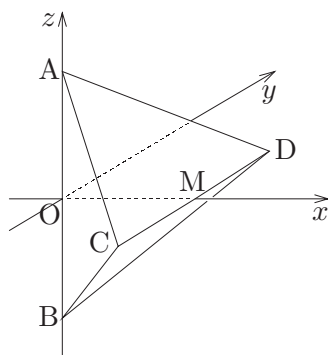
図チャレ 第123回(2011年12月)

座標空間内に正四面体 $ABCD$ があり, $A(0, 0, 1)$, $B(0, 0, -1)$ であり, 辺 CD の中点は x 軸上の $x > 0$ の部分にあるとする。面 ABC と面 ABD の両方に接し, 辺 CD にも接する円柱を S とし, 正四面体 $ABCD$ と円柱 S の共通部分を K とする。

- (1) 頂点 C , D の座標を求めよ。ただし, 点 C の y 座標は点 D の y 座標より小さいものとする。
- (2) 円柱 S の半径 r を求めよ。
- (3) 立体 K の体積 V を求めよ。

解答

(1)



原点 $O(0, 0, 0)$ は辺 AB の中点であり, OC と OD はともに正三角形の中線で AB に垂直であるから,

辺 AB と平面 OCD は垂直

である。したがって,

平面 OCD は xy 平面に一致

する。辺 CD の中点を M とすると, $OC = OD$ であるから

辺 CD は x 軸(直線 OM)と垂直

となり, 点 C の y 座標が点 D の y 座標より小さいこととあわせて

$$C(c, -d, 0), D(c, d, 0) \quad (c > 0, d > 0)$$

と表される。 $AC = CD = AB$ より

$$\sqrt{c^2 + d^2 + 1} = 2d = 2 \quad \therefore d = 1, c = \sqrt{2}$$

よって, 頂点 C , D の座標は

$$C(\sqrt{2}, -1, 0), D(\sqrt{2}, 1, 0) \quad (\text{答})$$

である。

- (2) 面 ABC と面 ABD はともに xy 平面に垂直であるから, 円柱 S の軸も xy 平面と垂直であり, 円柱 S の xy 平面による切り口は半径 r の円板である。

したがって, 円柱 S の半径 r は $\triangle OCD$ の内接円の半径に等しい。

△OCD の面積を 2 通りに表すことにより

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(OC + OD + CD)r &= \frac{1}{2} \cdot CD \cdot OM \\ \frac{1}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{3} + 2)r &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \\ \therefore r &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

である。

- (3) 正四面体 ABCD および立体 K は xy 平面 ($z = 0$) に関して対称であり, 平面 ACD 上の任意の点 (x, y, z) は

$$z = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + 1$$

を満たすから, 共通部分 K の $z \geq 0$ の部分は,
底面が半径 r の円(板),

$$\text{高さが } 2r \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}r$$

の円柱を平面 ACD により半分にした図形である。

$z \leq 0$ の部分も合同な図形であるから, 立体 K の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \cdot \pi r^2 \cdot \sqrt{2}r \times 2 \\ &= \sqrt{2}\pi r^3 \\ &= \sqrt{2}\pi \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \right)^3 \\ &= \sqrt{2}\pi \cdot \frac{(\sqrt{3} - 1)^3}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{3\sqrt{3} - 3 \cdot 3 + 3\sqrt{3} - 1}{2} \pi \\ &= (3\sqrt{3} - 5)\pi \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

