

## 図チャレ 第124回(2012年1月)

- (1) 半径1の円に内接する正24角形の面積を求めよ。  
 (2) 円周率は3.1より大きいことを示せ。

解答

(1) 半角公式より

$$\sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{8} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{8}$$

$$\therefore \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

正24角形を24個の二等辺三角形の和と考えて、正24角形の面積 $S$ は

$$\begin{aligned} S &= 24 \times \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{24} \\ &= 12 \times \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \\ &= 3\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) = 3\sqrt{6} - 3\sqrt{2} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2)  $\sin \frac{\pi}{12}$  の計算と同様にして

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$$

半径1の円に内接する正24角形の周の長さを $L$ とすると

$$\begin{aligned} L^2 &= \left( 24 \times 2 \sin \frac{\pi}{24} \right)^2 = 48^2 \times \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{\pi}{12} \right) \\ &= 48^2 \cdot \frac{2\sqrt{2} - (\sqrt{3} + 1)}{2 \cdot 2\sqrt{2}} \\ &= 288(4 - \sqrt{6} - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

$L < 2\pi$  より

$$\pi^2 > 72(4 - \sqrt{6} - \sqrt{2}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$9.61 \div 72 = 0.133 \dots$  より

$$3.1^2 < 72 \times 0.134 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

0.134と $4 - \sqrt{6} - \sqrt{2}$ の大小について

$$4 - \sqrt{6} - \sqrt{2} - 0.134 = 3.866 - (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$1.416^2 = 2.005056 > 2$  および  $2.45^2 = 6.0025 > 6$  より

$$3.866 = 2.45 + 1.416 > \sqrt{6} + \sqrt{2} \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

①, ②, ③, ④より

$$\pi^2 > 72(4 - \sqrt{6} - \sqrt{2}) > 72 \times 0.134 > 3.1^2$$

$$\therefore \pi > 3.1$$

(証明おわり)

(注)  $\pi > S$ を用いると,

$$S = 3\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) > 3 \times 1.414 \times 0.732 = 3.09636$$

となって評価が甘い。